

# **OPTICKÝ KLAM PLOCHÉ ZEMĚ**

Autor projektu: Ing. Petr Taubinger  
Zveřejnění: 20.07.2021 14:00  
Aktualizace: 24.07.2021 09:30  
Místo: Brno



Nejprve si vyjádříme základní vztahy:

$$O = 2\pi \cdot R \Rightarrow L = \varphi \cdot R \Rightarrow \varphi = \frac{L}{R}$$

$$\cos \varphi = \cos \frac{L}{R} = \frac{R}{R+v} \Rightarrow R+v = \frac{R}{\cos \frac{L}{R}} \Rightarrow v = \frac{R}{\cos \frac{L}{R}} - R$$

$$v = R \cdot \left( \frac{1}{\cos \frac{L}{R}} - 1 \right) \quad (1)$$

$$L = R \cdot \cos^{-1} \frac{R}{R+v}$$

Z výrazů (1) můžeme určit vzdálenost  $L_1$  k horizontu 0 z bodu 1 a část výšky  $v_2$  cílového objektu v bodě 2 skrytou pod *horizontem nulové nadmořské výšky* ve vzdálenosti  $L_{12}$  od objektu 1:

$$L_1 = R \cdot \cos^{-1} \frac{R}{R+v_1} \quad ; \quad L_2 = L_{12} - L_1 \quad ; \quad v_2 = R \cdot \left( \frac{1}{\cos \frac{L_2}{R}} - 1 \right) \quad (2)$$

Z obrázku plyne, že:

$$\varphi_1 = \frac{L_1}{R} \quad ; \quad \varphi_2 = \frac{L_2}{R} \quad ; \quad w_2 = h_2 - v_2$$

$$l_1 = (R+v_1) \cdot \sin \varphi_1 = (R+v_1) \cdot \sin \frac{L_1}{R}$$

$$l_2 = (R+v_2) \cdot \sin \varphi_2 = (R+v_2) \cdot \sin \frac{L_2}{R}$$

$$l = (R+v) \cdot \sin \frac{L}{R}$$

Vzhledem k tomu, že pozorovací úhel  $\Psi$  je malý, takže úhel  $\varepsilon \cong \pi/2$ , je možné pro průmět horní části vzdáleného cílového objektu vystupujícího nad *horizont nulové nadmořské výšky* do směru pozorování použít s dostatečnou přesností následující vzorec:

$$p \cong w \cdot \cos \varphi = w \cdot \cos \frac{L}{R} \quad (3)$$

$$p_2 \cong w_2 \cdot \cos \varphi_2 = (h_2 - v_2) \cdot \cos \frac{L_2}{R}$$

Tangens pozorovacího vertikálního úhlu  $\Psi$  vystupující části vzdáleného objektu nad *horizont nulové nadmořské výšky* pak určíme podle vztahu:

$$\tan \Psi = \frac{p_2}{l_1 + l_2}$$

$$\tan \Psi \cong \frac{(h_2 - v_2) \cdot \cos \frac{L_2}{R}}{(R+v_1) \cdot \sin \frac{L_1}{R} + (R+v_2) \cdot \sin \frac{L_2}{R}} \quad (4)$$

Pro tangens úhlu  $\Psi$  rovněž platí:

$$\tan \Psi = \frac{p}{l_1 + l}$$

$$\tan \Psi = \frac{p}{(R + v_1) \cdot \sin \frac{L_1}{R} + (R + v) \cdot \sin \frac{L}{R}} \quad (5)$$

Z rovnice (5) pak určíme průmět  $p$  v závislosti na  $L$  a následně pak z rovnice (3) vystupující část  $w$  vzdáleného objektu nad *horizontem nulové nadmořské výšky*:

$$p = \left[ (R + v_1) \cdot \sin \frac{L_1}{R} + (R + v) \cdot \sin \frac{L}{R} \right] \cdot \tan \Psi$$

$$\begin{aligned} w &\cong \frac{p}{\cos \frac{L}{R}} = \frac{\left[ (R + v_1) \cdot \sin \frac{L_1}{R} + (R + v) \cdot \sin \frac{L}{R} \right] \cdot \tan \Psi}{\cos \frac{L}{R}} \\ &= \frac{\left\{ (R + v_1) \cdot \sin \frac{L_1}{R} + \left[ R + R \cdot \left( \frac{1}{\cos \frac{L}{R}} - 1 \right) \right] \cdot \sin \frac{L}{R} \right\} \cdot \tan \Psi}{\cos \frac{L}{R}} \end{aligned}$$

Nakonec vyjádříme hledanou funkci  $h = v + w = f(L)$ :

$$\begin{aligned} v &= R \cdot \left( \frac{1}{\cos \frac{L}{R}} - 1 \right) \\ w &\cong \frac{\left\{ (R + v_1) \cdot \sin \frac{L_1}{R} + \left[ R + R \cdot \left( \frac{1}{\cos \frac{L}{R}} - 1 \right) \right] \cdot \sin \frac{L}{R} \right\} \cdot \tan \Psi}{\cos \frac{L}{R}} \\ h &= v + w \end{aligned} \quad (6)$$

Z výrazů (2), (4) a (6) jsme nyní schopni určit minimální výškový (zákrytový) profil terénu mezi dvěma vzdálenými objekty, kdy již není možné vidět z jednoho vrcholu na druhý.

### 2.3 Příklad (část 1)

Nechť výška prvního objektu (*Ztracené kameny* v Jeseníkách) je  $h_1 = 1\,250\text{ m}$ , výška druhého objektu (*Lomnický štít* ve Vysokých Tatrách) je  $h_2 = 2\,634\text{ m}$  a vzdálenost mezi nimi (v nulové nadmořské výšce) je  $L_{12} = 240\text{ km}$ . Určeme minimální výškový (zákrytový) profil terénu mezi těmito objekty  $h = f(L_1 + L)$ ;  $(L_1 + L) \in \langle 0, 240\,000 \rangle$ , kdy již není možné vidět z vrcholu jednoho objektu na druhý. Střední hodnota poloměru Země je  $6\,367\,443\text{ m}$ .

Zadané hodnoty:

$$h_1 = v_1 = 1\,250\text{ m}$$

$$h_2 = v_2 + w_2 = 2\,634\text{ m}$$

$$L_{12} = 240\,000\text{ m}$$

$$R = 6\,367\,443\text{ m}$$

Z výrazů (2) a (4) určíme statické parametry, které potřebujeme dosadit do rovnice pro výpočet funkce  $h = v + w = f(L)$ :

$$L_1 = R \cdot \cos^{-1} \frac{R}{R + v_1} = 6\,367\,443 \cdot \cos^{-1} \frac{6\,367\,443}{6\,367\,443 + 1250} \cong 126\,158,65 \text{ m}$$

$$L_2 = L_{12} - L_1 \cong 240\,000 - 126\,158,65 \cong 113\,841,35 \text{ m}$$

$$v_2 = R \cdot \left( \frac{1}{\cos \frac{L_2}{R}} - 1 \right) \cong 6\,367\,443 \cdot \left( \frac{1}{\cos \frac{113\,841,35}{6\,367\,443}} - 1 \right) \cong 1\,017,80 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} \tan \Psi &\cong \frac{(h_2 - v_2) \cdot \cos \frac{L_2}{R}}{(R + v_1) \cdot \sin \frac{L_1}{R} + (R + v_2) \cdot \sin \frac{L_2}{R}} \\ &\cong \frac{(2\,634 - 1\,017,80) \cdot \cos \frac{113\,841,35}{6\,367\,443}}{(6\,367\,443 + 1\,250) \cdot \sin \frac{126\,158,65}{6\,367\,443} + (6\,367\,443 + 1\,017,80) \cdot \sin \frac{113\,841,35}{6\,367\,443}} \\ &\cong 0,006732283 \end{aligned}$$

Nyní již můžeme z výrazů (6) vypočítat hodnoty funkce  $h = v + w = f(L)$ :

$$v = R \cdot \left( \frac{1}{\cos \frac{L}{R}} - 1 \right)$$

$$w \cong \frac{\left\{ (R + v_1) \cdot \sin \frac{L_1}{R} + \left[ R + R \cdot \left( \frac{1}{\cos \frac{L}{R}} - 1 \right) \right] \cdot \sin \frac{L}{R} \right\} \cdot \tan \Psi}{\cos \frac{L}{R}}$$

$$h = v + w$$

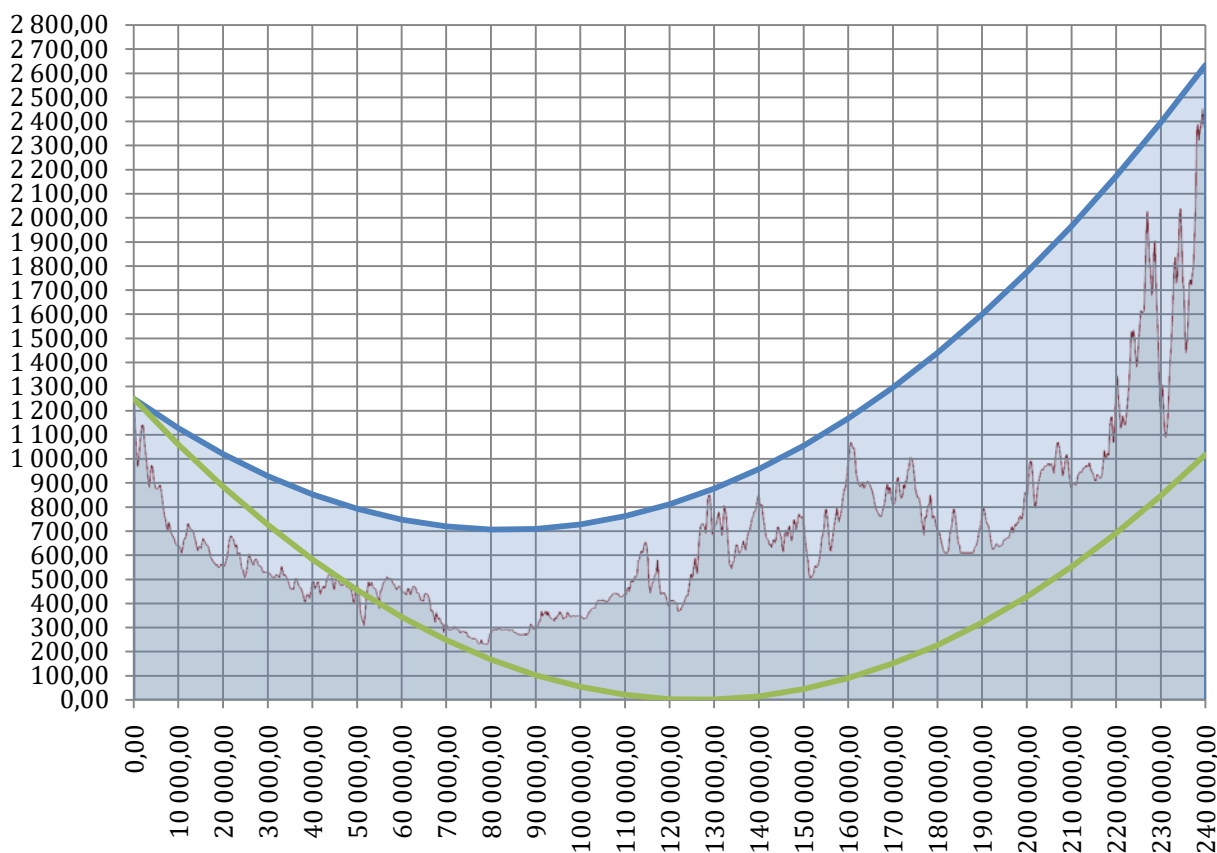
$$h \cong R \cdot \left( \frac{1}{\cos \frac{L}{R}} - 1 \right) + \frac{\left\{ (R + v_1) \cdot \sin \frac{L_1}{R} + \left[ R + R \cdot \left( \frac{1}{\cos \frac{L}{R}} - 1 \right) \right] \cdot \sin \frac{L}{R} \right\} \cdot \tan \Psi}{\cos \frac{L}{R}} ; \quad L \in \langle -L_1, L_2 \rangle$$

Tabulka 1: Tabulka vypočítaných hodnot minimální výšky terénu  $h = v + w$  v daném místě  $L_1 + L$ , který překryje objekt ve vzdálenosti  $L_{12}$  s výškou  $h_2$  pro pozorovatele na prvním vrcholu s výškou  $h_1$ :

$L$ [m]	$L_1 + L$ [m]	$v$ [m]	$w$ [m]	$h = v + w$ [m]
-126 158,65	0,00	1 250,00	0,00	1 250,00
-116 158,65	10 000,00	1 059,66	67,36	1 127,02
-106 158,65	20 000,00	885,05	134,71	1 019,76
-96 158,65	30 000,00	726,14	202,05	928,20
-86 158,65	40 000,00	582,96	269,39	852,35
-76 158,65	50 000,00	455,48	336,72	792,20
-66 158,65	60 000,00	343,71	404,05	747,77
-56 158,65	70 000,00	247,66	471,38	719,04
-46 158,65	80 000,00	167,31	538,70	706,01
-36 158,65	90 000,00	102,67	606,02	708,69
-26 158,65	100 000,00	53,73	673,34	727,08

-16 158,65	110 000,00	20,50	740,66	761,17
-6 158,65	120 000,00	2,98	807,99	810,96
3 841,35	130 000,00	1,16	875,31	876,47
13 841,35	140 000,00	15,04	942,63	957,68
23 841,35	150 000,00	44,63	1 009,96	1 054,60
33 841,35	160 000,00	89,93	1 077,29	1 167,22
43 841,35	170 000,00	150,93	1 144,63	1 295,56
53 841,35	180 000,00	227,64	1 211,97	1 439,61
63 841,35	190 000,00	320,06	1 279,32	1 599,38
73 841,35	200 000,00	428,18	1 346,68	1 774,86
83 841,35	210 000,00	552,02	1 414,05	1 966,06
93 841,35	220 000,00	691,56	1 481,42	2 172,98
103 841,35	230 000,00	846,83	1 548,80	2 395,63
113 841,35	240 000,00	1 017,80	1 616,20	2 634,00

Diagram 1: Tabulkové hodnoty vyjádříme názorně ve formě grafu. Osa  $x$  představuje vzdálenost  $L_1 + L$  od prvního objektu ke druhému měřenou v nulové nadmořské výšce; Osa  $y$  představuje nadmořskou výšku terénu; Modrá křivka představuje přímku procházející oběma vrcholy (viz [schéma 1](#)). Jedná se o grafické znázornění minimální překrývající výšky  $h = v + w$  terénu ležícího v přímé linii od vrcholu prvního objektu směrem k vrcholu druhého objektu v závislosti na vzdálenosti  $L_1 + L$ ; Zelená křivka představuje přímku procházející prvním vrcholem a *horizontem nulové nadmořské výšky*; Diagram rovněž obsahuje profil skutečného terénu mezi těmito dvěma objekty, který jsem vytvořil pomocí dat z aplikace Google Earth:



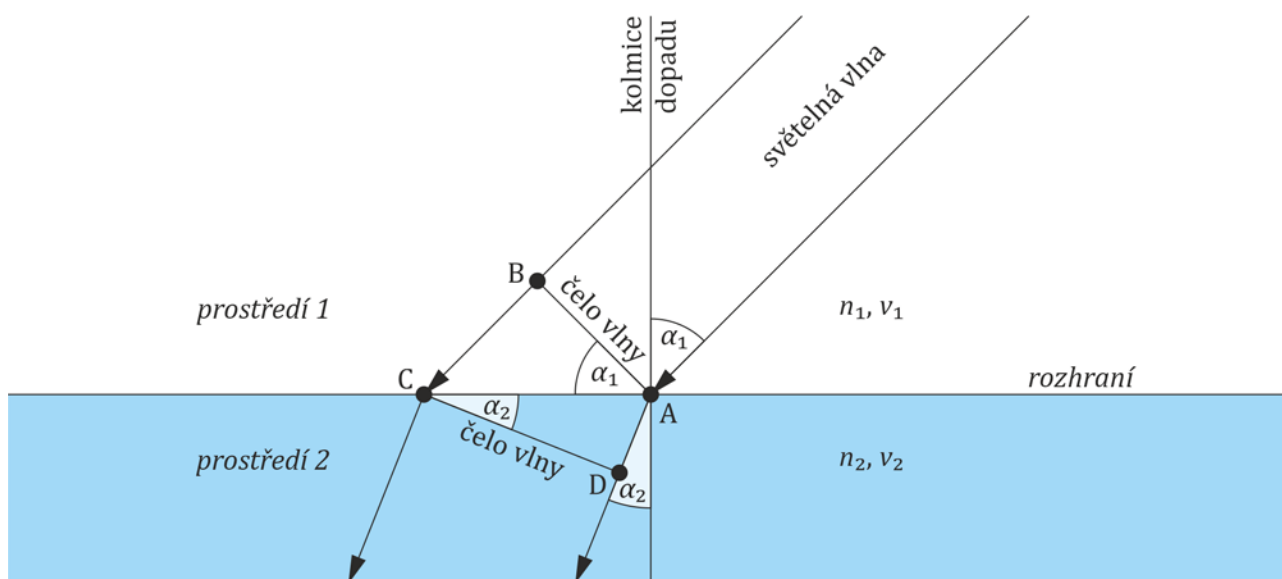
Oblast nad zelenou křivkou je tedy oblastí nad rovinou *horizontu nulové nadmořské výšky*. Z profilu terénu je patrné, že ve vzdálenosti zhruba 130 km existuje vyvýšené místo, které má přibližně stejnou nadmořskou výšku jako vypočtená hodnota překrývající cílový pozorovaný objekt *Lomnický štít* ve Vysokých Tatrách z místa pozorování *Ztracených kamenů* v Jeseníkách. *Lomnický štít* by tedy neměl být

vidět (nebo maximálně jen jeho špička) z tohoto místa pozorování, pokud uvažujeme pouze výše uvedenou geometrii. Ve videu byla ovšem vidět nejen relativně velká horní část *Lomnického štítu*, ale i části okolních hor s menší nadmořskou výškou. Může být tento optický klam „menšího zakřivení Země“ způsoben *terestrickou refrakcí*, kterou autor videa zcela vyloučil bez jakékoli hlubší úvahy? Podívejme se na to blíže z hlediska známých fyzikálních zákonů.

### 3. Optika

#### 3.1 Snellův zákon

Schéma 2: Je základním zákonem popisující vlnění procházející rozhraním dvou prostředí o dvou různých indexech lomu  $n_1$  a  $n_2$ , kdy se skokově mění optické vlastnosti:



Světelná vlna dopadá v *prostředí 1* s indexem lomu  $n_1$  na *rozhraní* pod úhlem  $\alpha_1$  rychlostí  $v_1$ . Úsečka  $AB$  představuje čelo dopadající vlny (vlnoplochu) v *prostředí 1*. Úsečka  $CD$  představuje čelo lomené vlny (vlnoplochu) v *prostředí 2*. Z obrázku vidíme, že platí:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{BC}{AD} = \frac{BC}{AD} = \frac{v_1 \cdot t}{v_2 \cdot t} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

Takže poměr sinů úhlů dopadu a lomu je pro dvě homogenní prostředí roven poměru rychlostí vlnění v těchto prostředích nebo převrácenému poměru indexů lomu v těchto prostředích:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1} \tag{7}$$

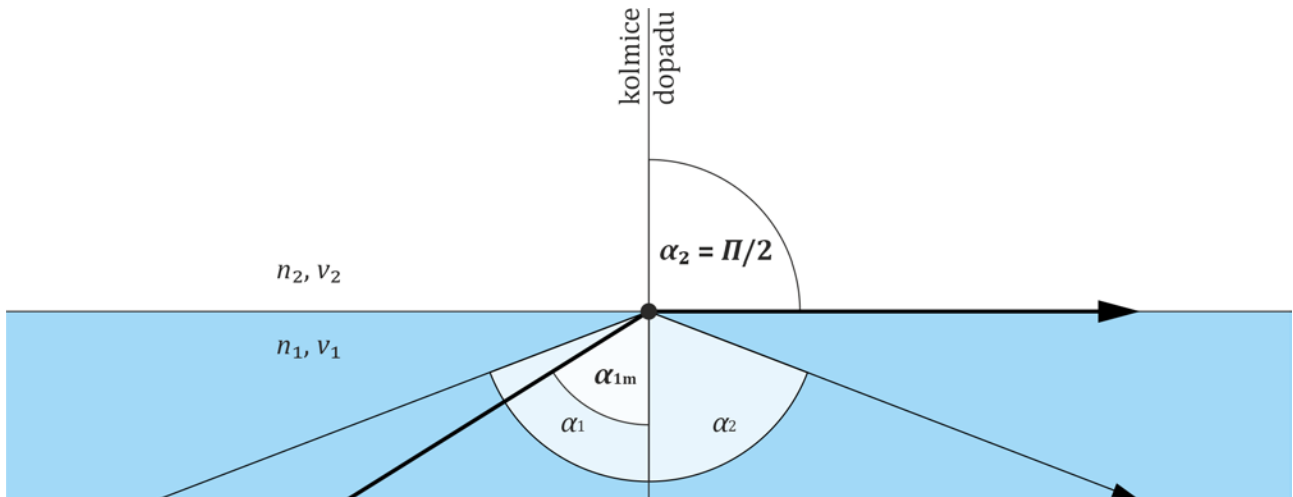
#### 3.2 Totální odraz (důsledek Snellova zákona)

Pokud se šíří světlo z prostředí opticky hustšího  $n_1$  do prostředí opticky řidšího  $n_2$  ( $n_1 > n_2$ ), nastane při určitém úhlu dopadu, který je větší než takzvaný *mezní úhel* dopadu ( $\alpha_1 > \alpha_{1m}$ ), *totální odraz*, kdy úhel lomu skokově přechází v úhel odrazu, který je stejně velký jako úhel dopadu. Z výrazu (7) pak plyne vztah:

$$\sin \alpha_2 = \frac{n_1}{n_2} \cdot \sin \alpha_1 \quad , \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \alpha_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin \alpha_{1m} = \sin \alpha_1 = \frac{n_2}{n_1} \quad ; \quad n_2 < n_1 \quad (8)$$

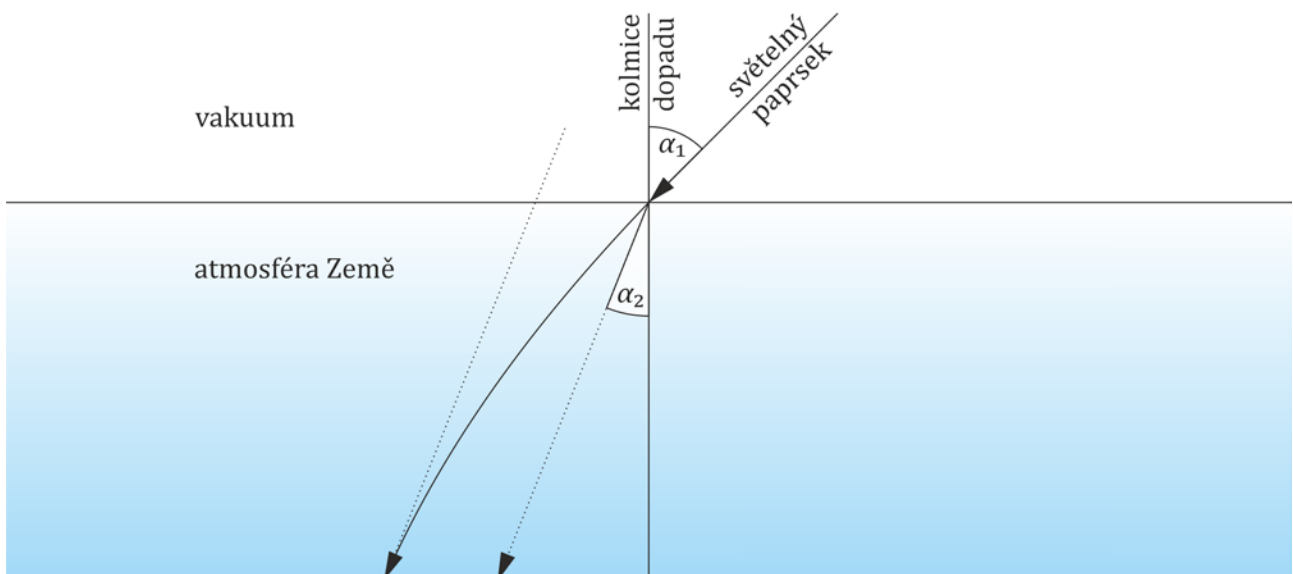
Schéma 3: *Mezní úhel*  $\alpha_1 = \alpha_{1m}$  je největší úhel dopadu, při kterém ještě nastává lom. Při větším úhlu dopadu  $\alpha_1 > \alpha_{1m}$  již nastává *totální odraz*, kdy paprsek vůbec neprojde do druhého prostředí, ale odráží se zpět a úhel odrazu se pak rovná úhlu dopadu. Platí:

$$\alpha_1 > \alpha_{1m} \Rightarrow \sin \alpha_2 = \sin \alpha_1 \quad (9)$$



### 3.3 Terestrická refrakce (důsledek Snellova zákona)

Schéma 4: *Astronomická refrakce* nastává při průchodu světelných paprsků atmosférou, která má v nižší nadmořské výšce vyšší hustotu kvůli gravitaci, a tudíž vyšší index lomu. Vzhledem k tomu, že se index lomu mění plynule s nadmořskou výškou, je světelný paprsek přicházející z vesmíru od vzdálené hvězdy v atmosféře ohýbán směrem ke kolmici dopadu. Princip ukazuje obrázek:



Na horizontu dosahuje zkreslení úhlu přicházejícího světla vzdálené hvězdy způsobené touto refrakcí kolem 0,5 stupňů. Proto se nám hvězda jeví výše nad horizontem, než ve skutečnosti je.

### 3.4 Index lomu vzduchu



Podle zdroje <https://eu.fme.vutbr.cz/file/vomm/0209.htm> lze index lomu suchého vzduchu pro vlnovou délku He-Ne laseru  $\lambda = 632,8 \text{ nm}$  vypočítat podle vzorce:

$$n = 1 + 7,8607 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{p}{T} \quad (10)$$

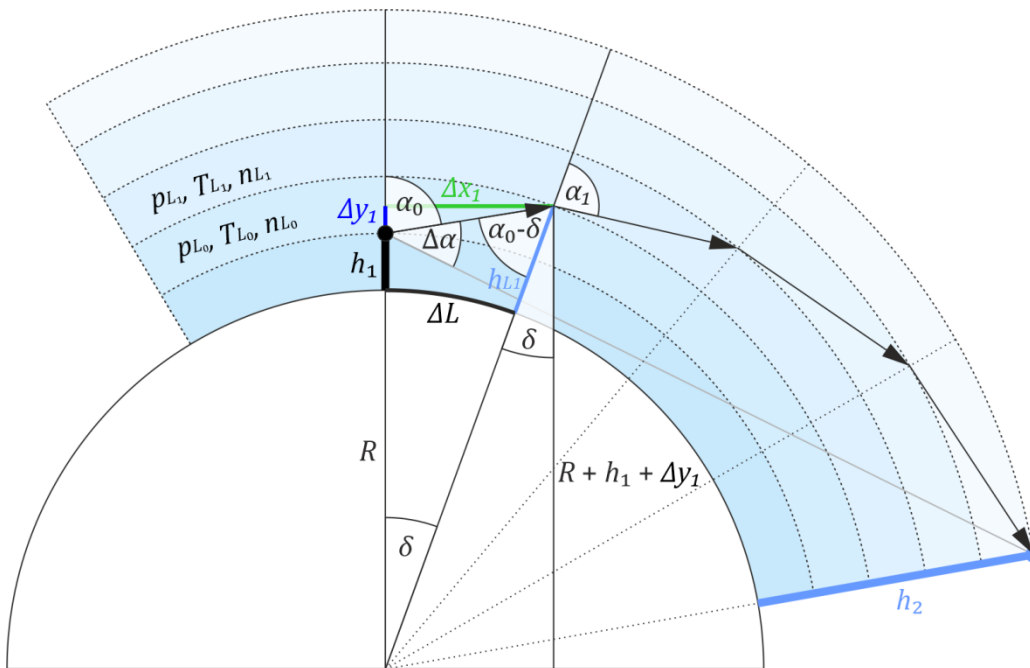
kde  $p$  je atmosférický tlak v pascálech [Pa] a  $T$  je teplota v Kelvinech [K]. Díky tomu můžeme odhadnout dráhu světelného paprsku a tím i posoudit, zda je skutečně možné vidět z dané vzdálenosti a výšky daný objekt s respektem na zakřivení Země a terén.

### 3.5 Výpočet dráhy světelného paprsku

Určíme dráhu světelného paprsku s ohledem na měnící se index lomu v závislosti na tlaku  $p_i$  a teplotě  $T_i$  v jednotlivých vrstvách atmosféry. Znamená to určit výšku  $h_{L_i}$  a index lomu  $n_{L_i}$  v závislosti na vzdálenosti  $L_1 + L$ :

#### 3.5.1 Odvození vztahu pro výpočet výšky $h_{L_i}$ v dílčích vzdálenostech $\Delta L$

Schéma 5: Znázornění vrstev atmosféry a lámání světelných paprsků (princip):



Z obrázku plyne:

$$\tan \alpha_{i-1} = \frac{\Delta x_i}{\Delta y_i} \Rightarrow \Delta x_i = \tan \alpha_{i-1} \cdot \Delta y_i \quad ; \quad \tan \delta = \frac{\Delta x_i}{R + h_{L_{i-1}} + \Delta y_i} \quad ; \quad i \in \langle 1, N \rangle, N \in \mathbb{N}$$

$$(R + h_{L_{i-1}} + \Delta y_i) \cdot \tan \delta = \tan \alpha_{i-1} \cdot \Delta y_i$$

$$(R + h_{L_{i-1}}) \cdot \tan \delta + \Delta y_i \cdot \tan \delta = \tan \alpha_{i-1} \cdot \Delta y_i$$

$$(R + h_{L_{i-1}}) \cdot \tan \delta = \Delta y_i \cdot (\tan \alpha_{i-1} - \tan \delta)$$

$$\Delta y_i = \frac{(R + h_{L_{i-1}}) \cdot \tan \delta}{\tan \alpha_{i-1} - \tan \delta} \quad (11)$$

Z obrázku dále plyne:

$$\cos \delta = \frac{R + h_{L_{i-1}} + \Delta y_i}{R + h_{L_i}}$$

$$R \cdot \cos \delta + h_{L_i} \cdot \cos \delta = R + h_{L_{i-1}} + \Delta y_i \Rightarrow$$

$$h_{L_i} = \frac{(R + h_{L_{i-1}} + \Delta y_i) - R \cdot \cos \delta}{\cos \delta} = \frac{(R + h_{L_{i-1}} + \Delta y_i)}{\cos \delta} - R$$

Za  $\Delta y_i$  dosadíme výraz (11) a dostaneme:

$$h_{L_i} = \frac{\left[ R + h_{L_{i-1}} + \frac{(R + h_{L_{i-1}}) \cdot \tan \delta}{\tan \alpha_{i-1} - \tan \delta} \right]}{\cos \delta} - R$$

$$h_{L_i} = \frac{(R + h_{L_{i-1}}) \cdot \left( 1 + \frac{\tan \delta}{\tan \alpha_{i-1} - \tan \delta} \right)}{\cos \delta} - R \quad ; \quad i \in \langle 1, N \rangle, N \in \mathbb{N} \quad (12)$$

### 3.5.2 Další proměnné

Úhel  $\delta$  určíme podle vztahu:

$$\delta = \frac{\Delta L}{R} \quad ; \quad \Delta L = \frac{L_{12}}{N}$$

$$\delta = \frac{L_{12}}{N \cdot R} \quad (13)$$

kde  $N$  je zvolený počet dílčích vzdáleností  $\Delta L$  nebo také vrstev atmosféry. Ze vzorce (10) určíme indexy lomu  $n_i$  jednotlivých vrstev atmosféry. Pokud známe pouze hodnoty tlaku a teploty na stanovišti pozorovatele a cíle, zbývající hodnoty dopočítáme na základě předpokladu lineární změny v závislosti na nadmořské výšce  $h_{L_i}$ :

$$n_1 = 1 + 7,8607 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{p_1}{T_1} \quad ; \quad n_2 = 1 + 7,8607 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{p_2}{T_2}$$

$$n_{L_i} = 1 + 7,8607 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{p_{L_i}}{T_{L_i}} \quad ; \quad i \in \langle 0, N \rangle, N \in \mathbb{N} \quad (14)$$

$$p_{L_i} = p_1 + \frac{p_2 - p_1}{h_2 - h_1} \cdot (h_{L_i} - h_1) \quad ; \quad T_{L_i} = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{h_2 - h_1} \cdot (h_{L_i} - h_1) \quad ; \quad i \in \langle 0, N \rangle, N \in \mathbb{N}$$

kde  $T_1, T_2, p_1, p_2, n_1, n_2$  jsou teplota, tlak a index lomu v nadmořských výškách  $h_1, h_2$ . Úhel  $\alpha_i$  určíme podle upraveného výrazu Snellova zákona (7) pro tento případ:

$$\frac{\sin(\alpha_{i-1} - \delta)}{\sin \alpha_i} = \frac{n_{L_i}}{n_{L_{i-1}}} \Rightarrow \sin \alpha_i = \frac{n_{L_{i-1}}}{n_{L_i}} \cdot \sin(\alpha_{i-1} - \delta)$$

$$\alpha_i = \sin^{-1} \left[ \frac{n_{L_{i-1}}}{n_{L_i}} \cdot \sin(\alpha_{i-1} - \delta) \right] \quad ; \quad i \in \langle 0, N \rangle, N \in \mathbb{N}$$

Při výpočtech „výstupních“ úhlů  $\alpha_i$  musíme provádět test na *totální odraz*, který je dán „vstupním“ *mezním úhlem*  $(\alpha_{i-1} - \delta)_m$  podle (8) - níže výraz (15) část (A); a test, zda se světelný paprsek pohybuje z prostředí s menším indexem lomu do prostředí s větším indexem lomu kvůli korekci úhlu  $\alpha_i$  (výpočet arcus sinus nám dáva doplňkový úhel do  $\pi$ ) - níže výraz (15) část (B):

$$\begin{aligned}
\text{(A)} \quad n_{L_{i-1}} \geq n_{L_i} &\Rightarrow \sin(\alpha_{i-1} - \delta)_m = \frac{n_{L_i}}{n_{L_{i-1}}} \\
\text{(A.1)} \quad \sin(\alpha_{i-1} - \delta) \leq \sin(\alpha_{i-1} - \delta)_m &\Rightarrow \alpha_i = \sin^{-1} \left[ \frac{n_{L_{i-1}}}{n_{L_i}} \cdot \sin(\alpha_{i-1} - \delta) \right] \\
\text{(A.2)} \quad \sin(\alpha_{i-1} - \delta) > \sin(\alpha_{i-1} - \delta)_m &\Rightarrow \alpha_i = \pi - (\alpha_{i-1} - \delta) \\
\text{(B)} \quad n_{L_{i-1}} < n_{L_i} &\Rightarrow \alpha_i = \pi - \sin^{-1} \left[ \frac{n_{L_{i-1}}}{n_{L_i}} \cdot \sin(\alpha_{i-1} - \delta) \right]
\end{aligned} \tag{15}$$

Tabulka 2: Následující tabulka obsahuje některé údaje pro *standardní atmosféru* převzaté z knihy *Fyzikální a matematické tabulky* vydanou v roce 1980 Státním nakladatelstvím technické literatury (SNTL). V případě teploty a tlaku se v uvedeném rozpětí nadmořské výšky jedná o lineární závislost (teplota a tlak s výškou do 5 000 m lineárně klesají). Této lineární závislosti využijeme v následujícím příkladu a pomocí interpolace stanovíme konkrétní teplotu a tlak pro konkrétní nadmořské výšky, které nejsou uvedeny v tabulce:

$h$ [m]	$t$ [°C]	$p$ [Pa]
0	15,00	101 325,00
500	11,75	95 457,00
1 000	8,50	89 871,00
1 500	5,25	84 550,00
2 000	2,00	79 490,00
2 500	-1,25	74 675,00
3 000	-4,50	70 099,00
3 500	-7,75	65 753,00
4 000	-11,00	61 629,00
4 500	-14,25	57 715,00
5 000	-17,50	54 007,00

### 3.6 Příklad (část 2)

Nechť výška prvního objektu (*Ztracené kameny* v Jeseníkách) je  $h_1 = 1\,250$  m, výška druhého objektu (*Lomnický štít* ve Vysokých Tatrách) je  $h_2 = 2\,634$  m a vzdálenost mezi nimi (v nulové nadmořské výšce) je  $L_{12} = 240$  km. Určeme dráhu světelného paprsku z jednoho vrcholu na druhý s ohledem na *terestrickou refrakci*. Vzhledem k tomu, že nemáme k dispozici přesná data ohledně teploty  $T_1$ ,  $T_2$  a tlaku  $p_1$ ,  $p_2$  v daném čase a místech, budeme uvažovat *standardní atmosféru* a použijeme výše uvedenou tabulku a hodnoty teploty a tlaku pro konkrétní nadmořskou výšku určíme interpolací.

Zadané hodnoty:

$$h_1 = v_1 = 1\,250 \text{ m}$$

$$h_2 = v_2 + w_2 = 2\,634 \text{ m}$$

$$L_{12} = 240\,000 \text{ m}$$

$$p_1 = 87\,210,5 \text{ Pa (interpolovaná hodnota)}$$

$$t_1 = 6,845 \text{ °C} \Rightarrow T_1 = 273,15 + 6,845 = 279,995 \text{ K (interpolovaná hodnota)}$$

$$p_2 = 73\,510,272 \text{ Pa (interpolovaná hodnota)}$$

$$t_2 = -2,121 \text{ °C} \Rightarrow T_2 = 273,15 - 2,121 = 271,029 \text{ K (interpolovaná hodnota)}$$

$$R = 6\,367\,443 \text{ m}$$

$$N = 24$$

Z výrazu (13) nejprve určíme úhel  $\delta$  a ze vzorců (14) indexy lomu vzduchu  $n_1, n_2$  pro oba vrcholy ve výšce  $h_1, h_2$ :

$$\delta = \frac{L_{12}}{N \cdot R}$$

$$n_1 = 1 + 7,8607 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{p_1}{T_1} \quad ; \quad n_2 = 1 + 7,8607 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{p_2}{T_2}$$

Dále z výrazů (12), (14), (15) vypočteme tabulkové hodnoty pro sestavení dráhy světelného paprsku. Počáteční úhel  $\alpha_0$  volíme odhadem a po provedených výpočtech a vykreslení celé dráhy paprsku zjistíme, zda jsme se „trefili“ do daného místa na cílovém objektu. V případě potřeby korigujeme počáteční úhel  $\alpha_0$  a znovu necháme proběhnout výpočty a vykreslování dráhy:

$$h_{L_i} = \frac{(R + h_{L_{i-1}}) \cdot \left(1 + \frac{\tan \delta}{\tan \alpha_{i-1} - \tan \delta}\right)}{\cos \delta} - R$$

$$p_{L_i} = p_1 + \frac{p_2 - p_1}{h_2 - h_1} \cdot (h_{L_i} - h_1) \quad ; \quad T_{L_i} = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{h_2 - h_1} \cdot (h_{L_i} - h_1)$$

$$n_{L_i} = 1 + 7,8607 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{p_{L_i}}{T_{L_i}}$$

$$(A) \quad n_{L_{i-1}} \geq n_{L_i} \Rightarrow \sin(\alpha_{i-1} - \delta)_m = \frac{n_{L_i}}{n_{L_{i-1}}}$$

$$(A.1) \quad \sin(\alpha_{i-1} - \delta) \leq \sin(\alpha_{i-1} - \delta)_m \Rightarrow \alpha_i = \sin^{-1} \left[ \frac{n_{L_{i-1}}}{n_{L_i}} \cdot \sin(\alpha_{i-1} - \delta) \right]$$

$$(A.2) \quad \sin(\alpha_{i-1} - \delta) > \sin(\alpha_{i-1} - \delta)_m \Rightarrow \alpha_i = \pi - (\alpha_{i-1} - \delta)$$

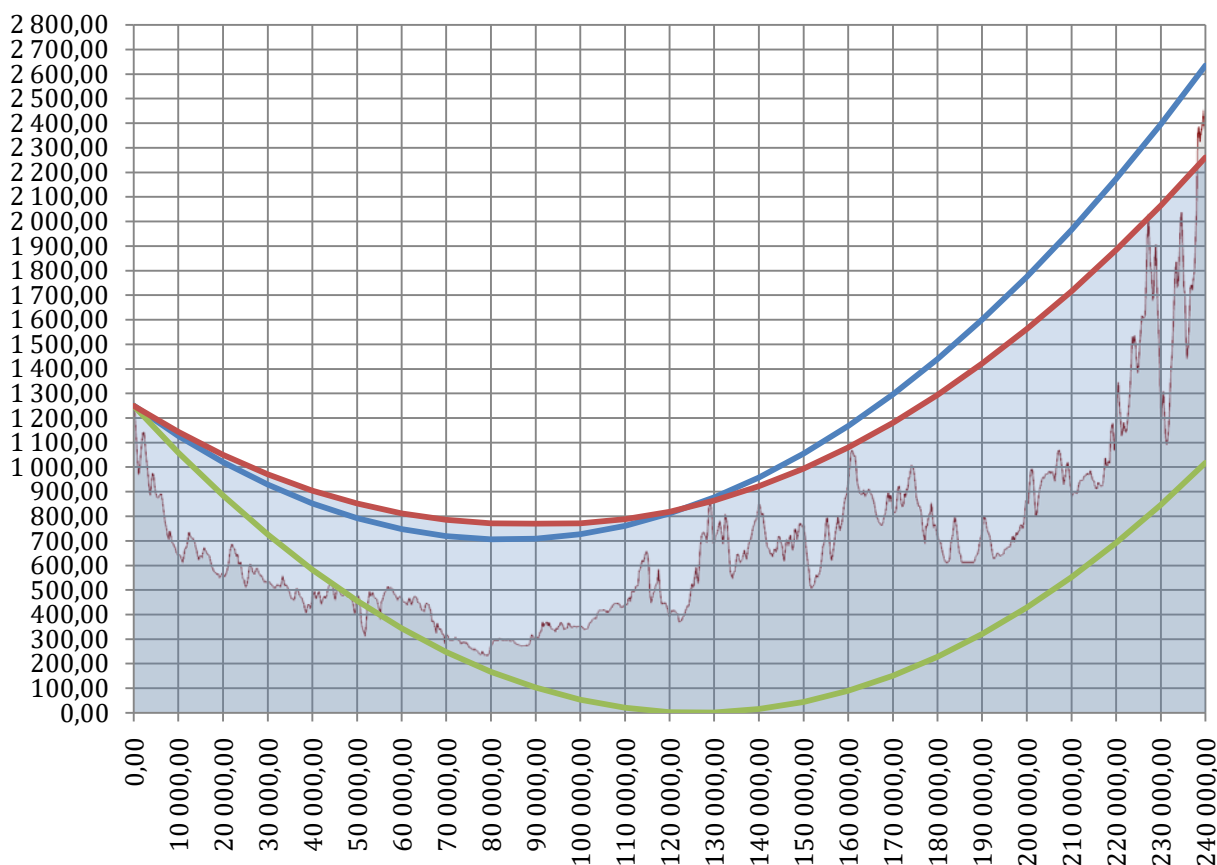
$$(B) \quad n_{L_{i-1}} < n_{L_i} \Rightarrow \alpha_i = \pi - \sin^{-1} \left[ \frac{n_{L_{i-1}}}{n_{L_i}} \cdot \sin(\alpha_{i-1} - \delta) \right]$$

Tabulka 3: Tabulka vybraných vypočítaných hodnot obsahuje výšku  $h_{L_i}$  v závislosti na vzdálenosti  $L_1 + L$  pro určení dráhy světelného paprsku. Počáteční úhel  $\alpha_0$  byl zvolen tak, aby se křivka dotýkala „nejvyšší“ překážky, která by mohla bránit ve výhledu na cílový objekt:

$i$ [-]	$L_1 + L$ [m]	$h_{L_i}$ [m]	$p_{L_i}$ [Pa]	$T_{L_i}$ [K]	$n_{L_i}$ [-]	$\alpha_i$ [rad]
0	0,00	1 250,00	87 210,50	279,9950	1,00024484	1,58219633
1	10 000,00	1 143,83	88 261,49	280,6828	1,00024718	1,58086135
2	20 000,00	1 051,01	89 180,28	281,2841	1,00024922	1,57952757
3	30 000,00	971,54	89 967,00	281,7990	1,00025096	1,57819591
4	40 000,00	905,38	90 621,86	282,2275	1,00025240	1,57686784
5	50 000,00	852,51	91 145,23	282,5700	1,00025355	1,57554591
6	60 000,00	812,86	91 537,71	282,8269	1,00025441	1,57423542
7	70 000,00	786,32	91 800,45	282,9989	1,00025499	1,57295081
8	80 000,00	772,63	91 936,01	283,0876	1,00025529	1,57176272
9	90 000,00	770,82	91 953,94	283,0993	1,00025532	1,57146217
10	100 000,00	772,01	91 942,12	283,0916	1,00025530	1,56992071
11	110 000,00	788,62	91 777,69	282,9840	1,00025494	1,56850192
12	120 000,00	819,42	91 472,79	282,7844	1,00025427	1,56710817
13	130 000,00	864,16	91 029,91	282,4946	1,00025330	1,56572574
14	140 000,00	922,73	90 450,15	282,1152	1,00025203	1,56435000
15	150 000,00	995,06	89 734,18	281,6466	1,00025045	1,56297890

16	160 000,00	1 081,10	88 882,44	281,0892	1,00024856	1,56161136
17	170 000,00	1 180,82	87 895,28	280,4431	1,00024637	1,56024681
18	180 000,00	1 294,20	86 772,98	279,7087	1,00024386	1,55888491
19	190 000,00	1 421,20	85 515,80	278,8859	1,00024104	1,55752548
20	200 000,00	1 561,80	84 123,97	277,9750	1,00023789	1,55616844
21	210 000,00	1 715,98	82 597,71	276,9762	1,00023442	1,55481377
22	220 000,00	1 883,73	80 937,24	275,8895	1,00023061	1,55346149
23	230 000,00	2 065,00	79 142,78	274,7151	1,00022646	1,55211167
24	240 000,00	2 259,79	77 214,55	273,4532	1,00022196	1,55076439

Diagram 2: Tabulkové hodnoty opět vyjádříme názorně ve formě grafu. Osa  $x$  představuje vzdálenost  $L_1 + L$  od prvního objektu ke druhému měřenou v nulové nadmořské výšce; Osa  $y$  představuje nadmořskou výšku terénu; Modrá křivka představuje přímku procházející oběma vrcholy (jedná se o grafické znázornění minimální překrývající výšky  $h = v + w$  terénu ležícího v přímé linii od vrcholu prvního objektu směrem k vrcholu druhého objektu v závislosti na vzdálenosti  $L_1 + L$ ); Zelená křivka představuje přímku procházející prvním vrcholem a *horizontem nulové nadmořské výšky*; Červená křivka je hledaná křivka světelného paprsku, který prochází vrcholem zdánlivě nejvyšší překážky mezi pozorovatelem a cílovým objektem. Opět je podložen profil skutečného terénu:



Z [diagramu 2](#) je patrné, že za předpokladu použití dat pro *standardní atmosféru* uvedených v [tabulce 2](#) můžeme vidět horních zhruba  $h_2 - h_{L_{24}} \cong 2\,634 - 2\,260 = 374$  m výšky cílového objektu (nevybarvená oblast mezi červenou a modrou křivkou). Na závěr ještě určíme úhlovou odchylku pozorování  $\Delta\alpha$  vůči geometricky přímému směru, to znamená, o jaký úhel  $\Delta\alpha$  se nám jeví vrchol pozorovaného objektu výše, než ve skutečnosti je. Nejprve si vyjádříme úhel  $\tau$  (viz [schéma 1](#)):

$$\sin \tau = \frac{R}{R + v_1} \Rightarrow \tau = \sin^{-1} \frac{R}{R + v_1}$$

Úhlová odchylka pak bude:

$$\begin{aligned}\Delta\alpha &= [\pi - (\tau + \Psi)] - \alpha_0 = \left[ \pi - \left( \sin^{-1} \frac{R}{R + v_1} + \Psi \right) \right] - \alpha_0 \\ &= \left[ \pi - \left( \sin^{-1} \frac{6\,367\,443}{6\,367\,443 + 1\,250} + 0,006732283 \right) \right] - 1,580676327 \\ &= 0,0032007949 \text{ rad} = 0,1833920388^\circ\end{aligned}$$

Pozorný čtenář si jistě všimne, že zde uvedený údaj  $\alpha_0 = 1,580676327$  je odlišný od údaje  $\alpha_0 = 1,58219633$  uvedeného v [tabulce 3](#) v prvním řádku. Jedná se o počáteční úhel pro výpočet křivky světelného paprsku, která končí ve vrcholu pozorovaného objektu právě kvůli výpočtu odchylky  $\Delta\alpha$ , kterou hledáme v souvislosti s tímto vrcholem. Tabulku výpočtu a příslušný graf zde již neuvádím a ověření nechávám na čtenáři. Červená křivka ve výše uvedeném grafu míří níže pod vrchol, protože jsem chtěl především ukázat, jakou část vrcholu cílového objektu lze spatřit na základě zde provedených výpočtů s daty, která byla k dispozici.

## 4. Závěr

Zdá se, že *terestrická refrakce* má vliv na dálkové pozorování. Teorie ploché Země a podobné jsou výsledkem velmi starých vzorců uvažování založených především na pocitech, víře a velmi povrchním zdůvodňování nejenom kvůli neznalosti základních přírodních zákonů a matematiky. Toto zdůvodňování je spíše o obhajobě víry a ega než o hledání pravdy.

I když v tomto myšlenkovém cvičení byla použita některá data pro *standardní atmosféru* uvedená v [tabulce 2](#), bylo by jistě zajímavé provést více pozorování v různých ročních obdobích při jiných než standardních atmosférických údajích a výsledky těchto pozorování a výpočtů nakonec porovnat.