SPECIÁLNÍ TEORIE RELATIVITY

Speciální teorie relativity je fyzikální teorie publikovaná v roce 1905 Albertem Einsteinem, která popisuje speciální případ *Einsteinova principu relativity*, kdy vliv gravitace lze zanedbat. Nahrazuje Newtonovy představy o prostoru a čase a zahrnuje také *teorii elektromagnetického pole* reprezentovanou Maxwellovými rovnicemi. O deset let později, v roce 1915, Einstein publikoval *obecnou teorii relativity*, která zahrnuje i gravitaci.

Relativitou rozumíme relativnost pohybů nebo relativnost jevů z různých úhlů pohledu. Relativita nás zasáhla celkem ve třech vlnách. První vlna nastala na přelomu 16. a 17. století, kdy se týkala pouze mechanických dějů. Jedná se o známý *Galileův princip relativity*. Další vlna přišla v roce 1905, kdy Albert Einstein vyřešil problém mezi elektromagnetickými jevy, kde platily zdánlivě jiné zákony, a mechanickými jevy, což vyústilo ve *Speciální teorii relativity*. Speciální relativita již přinesla některé výrazné změny v pohledu na svět. Zjistili jsme, že předměty mohou měnit své velikosti v závislosti na rychlosti, podobně časové intervaly mohou být různé z různých úhlů pohledu a podobně. Takže bylo zřejmé, že naše pojetí času a prostoru závisí na vzájemném pohybu pozorovatele a objektu. Třetí vlna přišla v roce 1915, kdy se principy relativity řešily nejenom pro mechanické a elektromagnetické děje, ale i pro gravitační. Ukázalo se, že setrvačnost a gravitace mají mnoho společného a všechno, co se týče gravitace, lze popisovat pomocí zakřiveného prostoru a času (geometrická teorie gravitace), a každé těleso k tomuto zakřivení přispívá. Obecná relativita představovala naprostý průlom do fyziky, protože představovala zcela nové pojetí času a prostoru.

Když mluvíme o relativitě, mluvíme o fyzikálních událostech. Tím rozumíme čtyři souřadnice - časovou souřadnici (kdy událost nastala) a tři prostorové souřadnice (kde událost nastala). Pro popis události je tedy nutné zadat čtyři souřadnice. Děje se snažíme popisovat v co nejjednodušších souřadnicových systémech. Většinou mluvíme o *inerciálních* soustavách, to znamená soustavách, kde platí *zákon setrvačnosti*. V nich se volná tělesa pohybují rovnoměrně přímočaře.

Galileův princip relativity z přelomu 16. a 17. století má různé formulace. Například „průběh mechanického děje nezávisí na volbě *inerciální soustavy*“; nebo „ve všech *inerciálních soustavách* vzájemně se pohybujících rovnoměrně přímočaře dopadne mechanický experiment stejně“; nebo „žádným experimentem nelze od sebe odlišit dva *inerciální systémy*“; a podobně. Tento princip relativity vede na zajímavou věc, kterou je sčítání rychlostí. Například celková rychlost osoby pohybující se v jedoucím vlaku je dána součtem rychlosti vlaku a rychlosti pohybující se osoby ve vlaku. Toto bylo základní dogma, kterému lidé věřili až do okamžiku, kdy začali studovat elektromagnetické jevy. V té době to byli například Michael Faraday (1791 - 1867), André-Marie Ampère (1775 - 1836), Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855), Heinrich Rudolf Hertz (1857 - 1894), Oliver Heaviside (1850 - 1925) a další. Toto bádání nakonec vyústilo v soustavu rovnic, které se říká Maxwellovy rovnice. Tyto rovnice popisují elektromagnetické děje uceleným matematickým způsobem. Z těchto rovnic ovšem plyne, že by se světlo mělo čířit stále stejnou rychlostí bez o hledu na zvolenou *inerciální soustavu*, což je v rozporu se skládáním rychlostí v klasické mechanice. Bylo zjevné, že pouze jedna s těchto teorií (klasická mechanika nebo elektrodynamika) může být správně. Nemůže platit obojí současně. Rozhodnout o tom, která teorie je správná, mohl pouze experiment (viz dále Michelsonův-Morleyův experiment). Po mnoha a mnoha dalších experimentech bylo jasné, že správné výsledky dává pouze elektrodynamika nikoli klasická mechanika. Bylo tedy třeba opravit klasickou fyziku. Tuto opravu udělal Albert Einstein v roce 1905 a nazývá se *Speciální teorie relativity*. Poznamenejme, že tento problém byl v té době již poměrně zralý k vyřešení. Kdyby to neudělal Albert Einstein, udělal by to pravděpodobně během týdnů až měsíců někdo jiný, kdo se tímto zabýval. Například Hermann Minkowski (1864 - 1909), Henri Poincaré (1854 - 1912), Hendrik Antoon Lorentz

(1853 - 1928) a další. Albert Einstein byl pouze nejrychlejší z nich. Einsteina proslavila především jeho *obecná teorie relativity*, kde jeho příspěvek je skutečně velmi výrazný.

Oprava sčítání rychlostí podle elektřiny a magnetismu vypadá takto:

$$v' = \frac{v+u}{1+\frac{vu}{c^2}}$$

V čitateli sčítáme klasickým způsobem dvě rychlosti v a u, ovšem jmenovatel přidala speciální relativita. Člen vu/c^2 je při nízkých rychlostech extrémně malý právě díky velké rychlosti světla a navíc jejímu kvadrátu, a proto se tento člen ve vzorci při nízkých rychlostech výrazněji neprojeví, což je právě onen důvod, proč to nebylo ve své době běžně rozpoznáno. Takže ani Galileo Galilei, ani Isaac Newton a další neměli šanci svými jednoduchými experimenty objevit tento člen. Teprve při rychlostech blízkých rychlosti světla se projevuje výrazně a vidíme relativistické jevy. Například dosadíme-li za rychlosti v a u rychlost světla c, dostaneme:

$$v' = \frac{v+u}{1+\frac{vu}{c^2}} = \frac{c+c}{1+\frac{cc}{c^2}} = \frac{2c}{2} = c$$

Složili jsme tedy dvě rychlosti světla $c + c$ a dostali jsme jednu rychlost světla c. Jak již bylo zmíněno, při nízkých rychlostech toto nepoznáme. Při vysokých rychlostech bude mít tato oprava již výrazný vliv. Po této opravě již můžeme říct, že mechanické i elektromagnetické děje probíhají ve všech *inerciálních soustavách* stejně, to znamená, že nelze rozlišit žádnou *inerciální soustavu* pomoci mechanického ani elektromagnetického experimentu.

Pokud si uvědomíme, že rychlost je dráha dělená uplynutým časem, a rychlost světla je v různých soustavách stejná, pak dráha nebo čas v podílu musí tento fakt kompenzovat. Tato úvaha vedla Einsteina k tomu, že se s rychlostí soustavy musí zkracovat dráha nebo prodlužovat časový interval, ale dohromady v podílu to musí dávat stále stejný výsledek. Čili fakt, že rychlost světla vyjde v různých soustavách stejná, znamená, že musíme měnit vzdálenosti a časové intervaly. A toto je ten největší objev, který přinesla speciální relativita.

OBSAH

1. INERCIÁLNÍ VZTAŽNÁ SOUSTAVA

Tisíce let si lidé kladli otázky ohledně světa kolem nás. Teprve až moderní věda, která vznikla v 16. a 17. století, začala dávat uspokojivé odpovědi. Newtonova mechanika nastolila otázku, zda je prostor absolutní nebo existuje nekonečně mnoho rovnoprávných *inerciálních vztažných soustav*, kde platí stejné fyzikální zákony.

1.1 Definice

Inerciální vztažná soustava je taková soustava, v níž platí *1. Newtonův pohybový zákon - Zákon setrvačnosti.* Jakákoli jiná vztažná soustava, pokud je vzhledem k dané *inerciální soustavě* v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu, je rovněž *inerciální*.

1.2 Vlastnosti

- Všechny *inerciální soustavy* jsou vůči sobě v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu.
- Ve všech *inerciálních soustavách* probíhají fyzikální děje stejně, to znamená, že pro ně platí stejné fyzikální zákony. Je tedy jedno, ve které soustavě provádíme výzkum. Z fyzikálního hlediska jsou rovnocenné.
- Rychlost světla ve vakuu je stejná ve všech směrech pro všechny pozorovatele v libovolné *inerciální vztažné soustavě*. Rychlost světla tedy také nezávisí na rychlosti objektu, které toto světlo vyzařuje.

2. ÉTER A MICHELSONŮV EXPERIMENT

Před postulováním *teorie relativity* bylo známo, že světlo je vlnění. Předpokládala se tedy substance, pomocí níž by se světlo šířilo tak, jako se mechanické vlnění šíří běžnou hmotou.

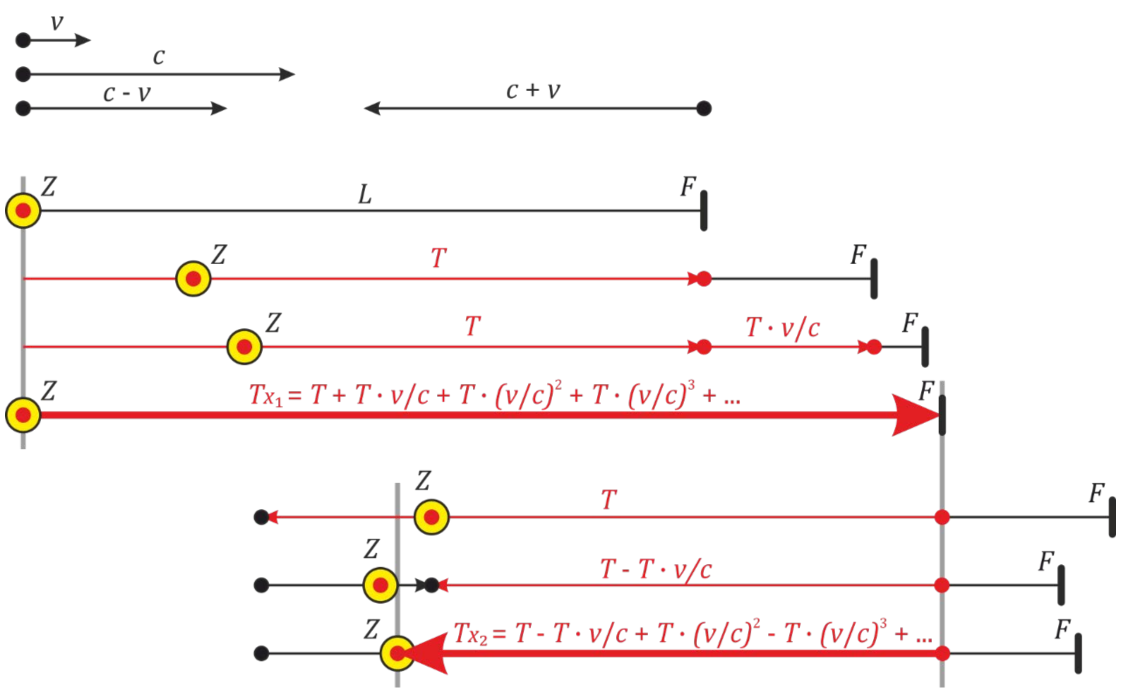
2.1 Definice éteru

Éter je fyzikální pojem označující hypotetickou všudypřítomnou substanci, v níž se šíří elektromagnetické záření včetně světla podobně, jako se šíří zvukové vlny ve vzduchu.

2.2 Úvod do problematiky

1. Newtonův pohybový zákon byl sice formulován na předpokladu absolutního prostoru, ale lze jej použít i v rámci *inerciálních soustav*. Podobně je tomu i v případě *Newtonova gravitačního zákona*, podle něhož gravitační síla závisí na vzájemné relativní poloze těles. Nebylo ale možné předem vyloučit existenci sil působících mezi částicemi, které by mohly záviset na jejich absolutních rychlostech (například magnetické síly působící mezi pohybujícími se elektrickými náboji). Ve skutečnosti však žádný konflikt mezi mechanikou a *principem relativity* nebyl zjištěn. Pochybnosti o univerzálnosti *principu relativity* ovšem přicházely z oboru optiky.

V Newtonově díle i mnoha dalších mezi sebou zápasily dva pohledy na světlo. Podle prvního bylo světlo proudem částic (korpuskulární teorie), podle druhého vlněním (vlnová teorie). Podle *korpuskulární teorie* je výsledná rychlost částic světla určena vektorovým součtem rychlosti emise částic ze zdroje a rychlosti pohybu zdroje (balistická hypotéza). Podle *vlnové teorie* byla rychlost světla určena vlnícím se prostředím a nezávisela na rychlosti pohybujícího se zdroje (podobně jako v případě šíření zvuku ve vzduchu). Problémem bylo, že světlo se šíří i ve vakuu a zde nebyla žádná běžná látka jako možný nosič identifikována. V této době vznikla představa „světlonosného *éteru*" vyplňujícího celý vesmír, jehož kmitáním je světlo nebo obecně elektromagnetické záření. Podle teorie měl *éter* v rovnováze splývat s absolutním prostorem. Takže určit pohyb v absolutním prostoru znamenalo určit rychlost vzhledem k *éteru*. Protože se Země (spolu se sluneční soustavou, galaxií a podobně) pohybuje vesmírem, a tudíž i předpokládaným *éterem* určitým směrem, můžeme říct, že naměřená rychlost světla by v různých směrech měla být rozdílná. K potvrzení nebo vyvrácení teorie o *éteru* by tedy mělo stačit změřit rychlost světla s dostatečnou přesností v různých směrech. V 19. století byl problém s přesností měření, protože pokud uvažujeme rychlost světla 300 000 km/s a rychlost Země kolem Slunce 30 km/s, pak chyba měření musí být řádově menší, než desetitisícina naměřené hodnoty. Změřit rychlost světla jako podíl dráhy L a naměřeného času T nebylo technicky možné, protože by to vyžadovalo poměrně přesnou synchronizaci hodin v obou místech Z a F. Druhým způsobem měření, kde odpadá problém se synchronizací obou hodin, bylo použití zrcadla:



Na obrázku znázorňuje spojnice L vzdálenost bodů zdroje světla Z a fotobuňky (zrcadla) F. Nechť je současně tato spojnice i směr pohybu Země vůči pomyslnému *éteru*. Obrazně to znamená, že „vane *éterový* protivítr“. Rychlost světla vzhledem k Zemi by byla ve směru pohybu Země $(c - v)$ a v protisměru $(c + v)$. Doba T_{x_1} průletu fotonu od zdroje k pravé fotobuňce (zrcadlu), to znamená ve směru pohybu Země, je dána výrazem:

$$T_{x_1} = T + T \cdot \left(\frac{v}{c}\right) + T \cdot \left(\frac{v}{c}\right)^2 + T \cdot \left(\frac{v}{c}\right)^3 + \ ... = T \cdot \left[1 + \left(\frac{v}{c}\right) + \left(\frac{v}{c}\right)^2 + \left(\frac{v}{c}\right)^3 + \ ...\right] \quad (1)$$

Doba T_{x_2} průletu fotonu od pravé fotobuňky (zrcadla) ke zdroji (detektoru), to znamená proti směru pohybu Země, je dána výrazem:

$$T_{x_2} = T - T \cdot \left(\frac{v}{c}\right) + T \cdot \left(\frac{v}{c}\right)^2 - T \cdot \left(\frac{v}{c}\right)^3 + \ ... = T \cdot \left[1 - \left(\frac{v}{c}\right) + \left(\frac{v}{c}\right)^2 - \left(\frac{v}{c}\right)^3 + \ ...\right] \quad (2)$$

Celková doba průletu fotonu tam i zpět je tedy:

$$T_x = T_{x_1} + T_{x_2} = \left[T + T \cdot \left(\frac{v}{c}\right) + T \cdot \left(\frac{v}{c}\right)^2 + T \cdot \left(\frac{v}{c}\right)^3 + \ ...\right] + \left[T - T \cdot \left(\frac{v}{c}\right) + T \cdot \left(\frac{v}{c}\right)^2 - T \cdot \left(\frac{v}{c}\right)^3 + \ ...\right]$$

$$T_x = T_{x_1} + T_{x_2} = 2T + 2T \cdot \left(\frac{v}{c}\right)^2 + 2T \cdot \left(\frac{v}{c}\right)^4 + \ ... = 2T \cdot \left[1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2 + \left(\frac{v}{c}\right)^4 + \ ...\right] \quad (3)$$

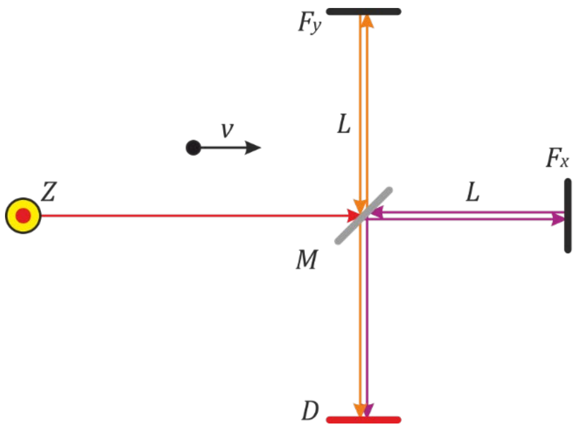
Můžeme konstatovat následující:

(1) V prvním případě, je doba průletu T_{x_1} fotonu ve srovnání s dobou T větší o $T \cdot \left(\frac{v}{c}\right)$ v prvním přiblížení Taylorova rozvoje, což patří do oblasti experimentů prvního řádu. Ovšem tyto experimenty jsou prakticky nerealizovatelné kvůli již zmíněné nemožnosti dostatečně přesně synchronizovat hodiny.

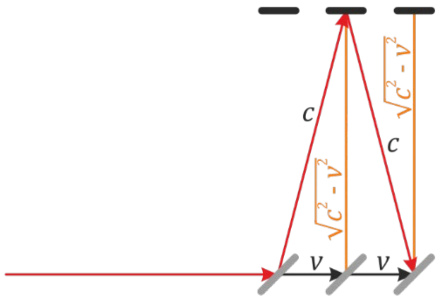
(2) Ve druhém případě, kdy je použito zrcadlo a foton tedy absolvuje cestu tam i zpět, je doba jeho průletu T_x ve srovnání s dobou $2T$ větší o $2T \cdot (v/c)^2$ ve druhém přiblížení Taylorova rozvoje, což patří do oblasti experimentů druhého řádu. Tyto experimenty vyžadují mimořádnou přesnost.

2.3 Michelsonův-Morleyův experiment

Koncem 19. století si Albert Abraham Michelson (1852 – 1931) uvědomil, že pro zjištění časového rozdílu mezi průchody světelných paprsků po určitých drahách lze použít interferenčního jevu a místo času měřit posuv interferenčních proužků. Poprvé tento experiment uskutečnil roku 1891:



Vektorové skládání rychlostí
pro započtení „éterového větru“



Na obrázku vidíme zařízení pro Michelsonův experiment. Světelný paprsek putuje od zdroje Z směrem k polopropustnému zrcadlu M. Část z něj prochází tímto zrcadlem a část se od něj odráží do kolmého směru. Oba paprsky pak urazí stejnou dráhu L k zrcadlům F_x a F_y, od kterých se odrazí zpět směrem k polopropustnému zrcadlu M. Zde se paprsky spojí a jako jeden pokračují směrem k detektoru D, kde vytvoří interferenční obrazec. Jestliže obrátíme celé zařízení do jiného směru, pak interferenční proužky v obrazci zůstanou přesně ve stejném místě pouze v případě, jestliže se rychlost světla v ramenech interferometru L nezměnila. Při předpokladu existence *éteru* by to znamenalo, že zařízení je vůči němu v klidu.

Takže předpokládejme, že se Země pohybuje ve směru dráhy paprsku vycházejícího ze zdroje Z. Po rozdělení paprsku v polopropustném zrcadle M na dva vzájemně kolmé paprsky se paprsek sledující směr pohybu Země po odrazu od zrcadla F_x vrací zpět k polopropustnému zrcadlu M v čase:

$$T_x = \frac{L}{c-v} + \frac{L}{c+v} = \frac{L(c+v)+L(c-v)}{c^2-v^2} = \frac{2L\cdot c}{c^2-v^2} = \frac{2L\cdot c}{c^2\cdot\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} = \frac{2L}{c}\cdot\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$T_x = \frac{2L}{c}\cdot\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{4}$$

Druhý, na něj kolmý paprsek se po odrazu od zrcadla F_y vrací zpět k polopropustnému zrcadlu M v čase:

$$T_y = \frac{2L}{\sqrt{c^2-v^2}} = \frac{2L}{\sqrt{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}} = \frac{2L}{c}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Na první pohled vidíme, že $T_x > T_y$ neboli foton pohybující se v ose x doletí k polopropustnému zrcadlu M později než foton pohybující se v ose y. Časový rozdíl ΔT pak je:

$$\Delta T = T_x - T_y = \frac{2L}{c}\cdot\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{2L}{c}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2L}{c}\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) \tag{5}$$

Alternativně můžeme také pomocí Taylorovy řady rozvinout druhý člen $1/(1 - v^2/c^2)$ výrazu (4) pro výpočet T_x, čímž dostaneme výraz (1) pro T_{x_1}, který jsme odvodili výše. Takže máme:

$$f(v) = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \quad ; \quad v \in (-c, c) \quad ; \quad f(x) = \frac{1}{1 - x^2} \quad ; \quad x = \frac{v}{c} \in (-1,1)$$

Vzorec pro Taylorovu řadu $T^{x_0}_f(p)$ a výpočet koeficientů a_k je:

$$f(x) = T^{x_0}_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k = a_0 + a_1 \cdot (x - x_0) + a_2 \cdot (x - x_0)^2 + a_3 \cdot (x - x_0)^3 + \cdots$$
$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \tag{6}$$

Pro náhled vyjádříme prvních pět derivací a z nich koeficienty a_k řady se středem $x_0 = 0$:

$$f^{(0)}(x_0) = \frac{1}{1 - {x_0}^2} = \frac{1}{1 - 0^2} = 1 \quad ; \quad a_0 = \frac{f^{(0)}(x_0)}{k!} = \frac{f^{(0)}(0)}{0!} = \frac{1}{1} = 1$$
$$f^{(1)}(x_0) = \frac{2x_0}{(1 - {x_0}^2)^2} = \frac{2 \cdot 0}{(1 - 0^2)^2} = 0 \quad ; \quad a_1 = \frac{f^{(1)}(x_0)}{k!} = \frac{f^{(1)}(0)}{0!} = \frac{0}{1} = 0$$
$$f^{(2)}(x_0) = \frac{2 + 6{x_0}^2}{(1 - {x_0}^2)^3} = \frac{2 + 6{x_0}^2}{(1 - {x_0}^2)^3} = 2 \quad ; \quad a_2 = \frac{f^{(2)}(x_0)}{k!} = \frac{f^{(2)}(0)}{2!} = \frac{2}{2} = 1$$
$$f^{(3)}(x_0) = \frac{24x_0 + 24{x_0}^3}{(1 - {x_0}^2)^4} = \frac{24x_0 + 24{x_0}^3}{(1 - {x_0}^2)^4} = 0 \quad ; \quad a_3 = \frac{f^{(3)}(x_0)}{k!} = \frac{f^{(3)}(0)}{3!} = \frac{0}{6} = 0$$
$$f^{(4)}(x_0) = \frac{24 - 240{x_0}^2 + 120{x_0}^4}{(1 - {x_0}^2)^5} = 24 \quad ; \quad a_4 = \frac{f^{(4)}(x_0)}{k!} = \frac{f^{(4)}(0)}{3!} = \frac{24}{24} = 1$$

A nakonec dosadíme do vzorce pro Taylorovu řadu (6):

$$f(x) = \frac{1}{1 - x^2} = 1 + 0 \cdot x + 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + 1 \cdot x^4 + \cdots = 1 + x^2 + x^4 + \cdots$$

$$f(v) = \frac{1}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = 1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2 + \left(\frac{v}{c}\right)^4 + \ \dots$$

Dále dosadíme do vztahu pro výpočet T_x a dostáváme již známý výraz (3):

$$T_x = \frac{2L}{c} \cdot \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{2L}{c}\left[1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2 + \left(\frac{v}{c}\right)^4 + \ \dots\right]$$

Proto také můžeme psát alternativně tento výraz pro časový rozdíl ΔT:

$$\Delta T = T_x - T_y = \frac{2L}{c}\left[1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2 + \left(\frac{v}{c}\right)^4 + \ \dots\right] - \frac{2L}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$
$$= \frac{2L}{c} \cdot \left\{\left[1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2 + \left(\frac{v}{c}\right)^4 + \ \dots\right] - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right\}$$

Dráhový rozdíl ΔL potom bude:

$$\Delta L = c \cdot \Delta T \tag{7}$$

Počet proužků n, o které by se měl posunout interferenční obrazec, je dán vztahem:

$$n = \frac{\Delta L}{\lambda} \tag{8}$$

Kde λ je vlnová délka použitého světla. Pokud zařízení otočíme o 90 stupňů, proužky by se měly posunout na druhou stranu. To znamená, že v závislosti na velikosti dráhového rozdílu vznikají interferenční maxima pro $\Delta L = n \cdot \lambda$ a interferenční minima pro $\Delta L = (2n+1) \cdot \lambda/2$, kde $n \in \mathbb{Z}$ a λ vlnová délka paprsku. Při uvažované oběžné rychlosti Země kolem Slunce $v = 30\ km/s$, vlnové délce použitého světla $\lambda = 500\ nm$ a velikosti ramen interferometru $L = 10\ m$ dostáváme pro časový rozdíl ΔT, dráhový rozdíl ΔL a počet proužků n tyto hodnoty:

$$\Delta T = \frac{2L}{c} \cdot \left[\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right] = \frac{2 \cdot 10}{300 \cdot 10^6} \cdot \left[\frac{1}{1 - \frac{(30 \cdot 10^3)^2}{(300 \cdot 10^6)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(30 \cdot 10^3)^2}{(300 \cdot 10^6)^2}}} \right]$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 10^{-7} \cdot \left[\frac{1}{1 - 10^{-8}} - \frac{1}{\sqrt{1 - 10^{-8}}} \right] = \frac{2}{3} \cdot 10^{-7} \cdot \left[\frac{1}{0{,}99999999} - \frac{1}{\sqrt{0{,}99999999}} \right]$$

$$\cong \frac{2}{3} \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot 10^{-9} \cong 3{,}33 \cdot 10^{-16}\ \mathrm{s}$$

$$\Delta L = c \cdot \Delta T = 300 \cdot 10^6 \cdot 3{,}33 \cdot 10^{-16} \cong 100 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{m}$$

$$n = \frac{\Delta L}{\lambda} = \frac{100 \cdot 10^{-9}}{500 \cdot 10^{-9}} = 0{,}2$$

O stejnou hodnotu n, ale na druhou stranu, by se posunul v případě, že by byl přístroj otočen o 90°. Proužky by se tedy při otáčení zařízení posouvaly v rozmezí:

$$2n = \frac{2 \cdot \Delta L}{\lambda} = \frac{2 \cdot 100 \cdot 10^{-9}}{500 \cdot 10^{-9}} = 0{,}4$$

Časový rozdíl obou paprsků by tedy musel být pozorovatelný.

Michelsonův-Morleyův experiment existenci *éteru* nepotvrdil. Z výsledku vyplynulo, že buď takový éter vůbec neexistuje, nebo je pohybujícími se tělesy zcela strháván (teorie strhávaného éteru). Přestože byl tento experiment mnohokrát opakován i v následujících letech s daleko dokonalejšími zařízeními, žádný fázový posun světla se nepodařilo naměřit, a to ani v 50. letech 20. století s použitím laseru a později ani s vysokofrekvenčními rezonátory. Tyto jednoznačné výsledky včetně astronomických pozorování definitivně vyvrátily obě hypotézu o *éteru*.

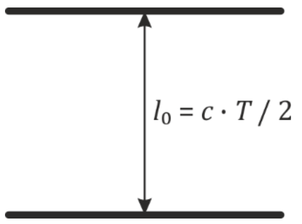
Poznamenejme, že zastánci teorie o existenci *éteru* argumentují, že v okolí Země se *éter* chová turbulentně a tudíž znesnadňuje samotné měření. Jenže neberou v úvahu moderní satelitní technologie, jako jsou navigační družice pohybující se ve vzdálenosti 20 000 km, což je přibližně trojnásobek poloměru Země. A protože rychlost pohybu Země kolem Slunce je asi 30 km/s, což je desetitisícina rychlosti světla, důsledkem existence takového *éteru* by byly chyby v navigaci do desetitisíciny vzdálenosti od těchto satelitů. V případě GPS by to byla odchylka asi 2 km podle toho, kde se na Zemi vůči aktuálnímu směru oběhu pozorovatel zrovna nachází. Jinými slovy, jeho poloha by byla posunutá výškově nebo vodorovně podle aktuální polohy na Zemi. Tento efekt by se dal samozřejmě matematicky v přístrojích kompenzovat, takže protiargumentem je teorie o tajných kompenzacích. Problémem této teorie je fakt, že v minulosti, když byly tyto přístroje ještě relativně nedostupné veřejnosti, si je radioamatéři konstruovali sami a také si programovali veškeré výpočty. Ze zveřejněných konstrukcí plyne, že žádnou jinou kompenzaci kromě relativistické nepotřebovali.

„Negativní“ výsledek Michelsonova-Morleyova experimentu měl pro fyziku obrovský význam. Vedl Alberta Einsteina k formulaci základního postulátu *teorie relativity*, kterým je princip konstantní rychlosti světla.

3. DILATACE ČASU

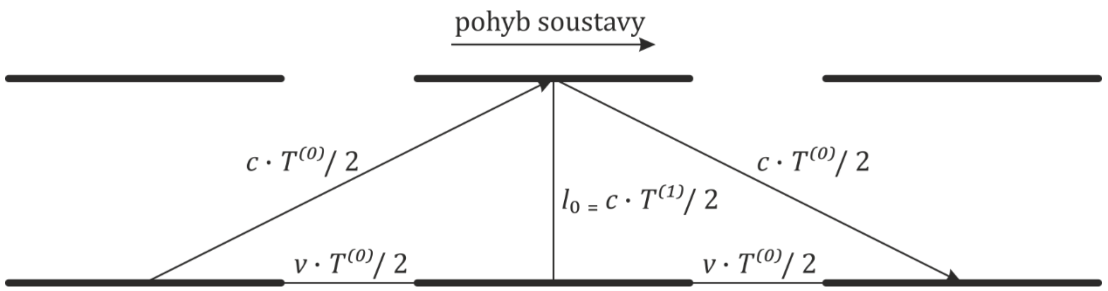
Dilatace času je fenomén z oboru *speciální teorie relativity*, který můžeme vysvětlit pomocí takzvaných světelných hodin, což jsou v podstatě dvě rovnoběžná zrcadla nacházející se od sebe ve vzdálenosti l_0 a mezi kterými kmitá v kolmém směru světelný paprsek. Jedna perioda T kmitů těchto hodin se dá vyjádřit známým vztahem mezi vzdáleností, rychlostí a časem:

$$T = \frac{2l_0}{c} \tag{9}$$



Kde c je rychlost světla. Toto je situace, kdy se pozorovatel nachází v libovolné *inerciální soustavě S* souběžně s hodinami. To znamená, že hodiny jsou vůči pozorovateli v klidu.

Nechť $S^{(1)}$ je inerciální soustava s hodinami, která se pohybuje vůči „klidové“ inerciální soustavě $S^{(0)}$. Pokud se pozorovatel nachází v „klidové“ *inerciální soustavě* $S^{(0)}$, vůči které se hodiny pohybují, pak celá situace vypadá následovně. Paprsek vyjde od spodního zrcadla směrem k hornímu, ale než k němu dorazí, celá „pohybující se“ *inerciální soustava* $S^{(1)}$ se zrcadly se posune vůči „klidové“ *inerciální soustavě* $S^{(0)}$, a tudíž pro pozorovatele v soustavě $S^{(0)}$ se jeví dráha paprsku jako šikmá.



Paprsek se pohybuje po přeponě pomyslného pravoúhlého trojúhelníka. Velikosti stran jsou vyjádřeny na obrázku. Paprsek viditelně urazí delší dráhu, než v prvním případě, kdy se pozorovatel pohybuje souběžně s hodinami. Doba periody $T^{(0)}$ je tedy pro pozorovatele nacházející se v soustavě $S^{(0)}$ větší než doba periody $T^{(1)}$ pro pozorovatele nacházející se v soustavě $S^{(1)}$, protože rychlost světla c je pro oba pozorovatele stejná (v obou *inerciálních soustavách* platí stejné fyzikální zákony).

Podle Pythagorovy věty a výrazu (9) platí:

$$\left(c \cdot \frac{T^{(0)}}{2}\right)^2 = \left(v \cdot \frac{T^{(0)}}{2}\right)^2 + {l_0}^2$$

$$c^2 \cdot \frac{{T^{(0)}}^2}{4} = v^2 \cdot \frac{{T^{(0)}}^2}{4} + {l_0}^2$$

$$c^2 \cdot {T^{(0)}}^2 = v^2 \cdot {T^{(0)}}^2 + 4{l_0}^2$$

$$(c^2 - v^2) \cdot {T^{(0)}}^2 = 4{l_0}^2$$

$$T^{(0)} = \sqrt{\frac{4{l_0}^2}{(c^2 - v^2)}} = \frac{2l_0}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2l_0}{c \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{T^{(1)}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

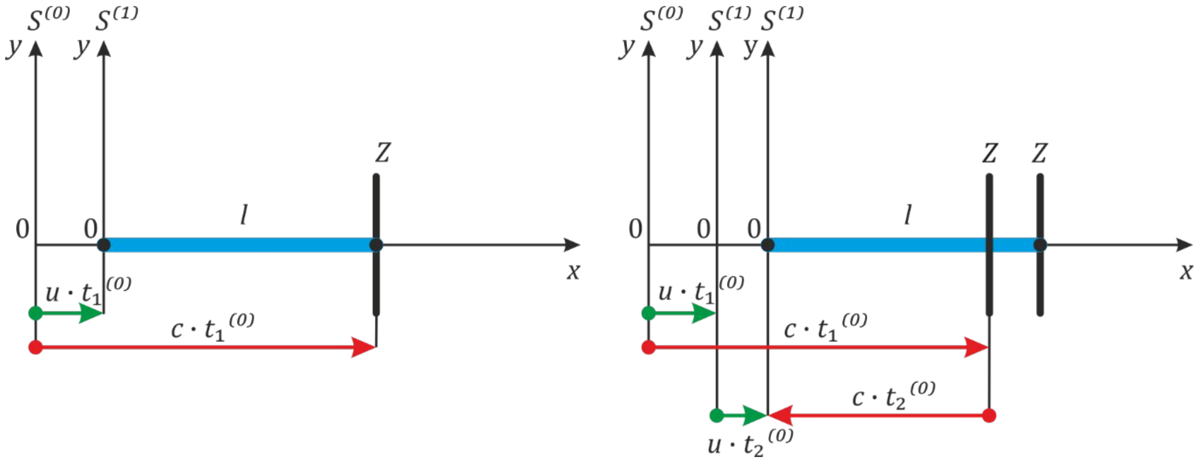
$$T^{(0)} = \frac{T^{(1)}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow T^{(1)} = T^{(0)} \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{10}$$

Kde $T^{(1)}$ je čas, který potřebuje foton, aby urazil cestu k protějšímu zrcadlu a zpět naměřený v „pohybující se“ *inerciální soustavě* $S^{(1)}$ a $T^{(0)}$ je čas stejného paprsku naměřený v „klidové“ *inerciální soustavě* $S^{(0)}$.

4. KONTRAKCE DÉLKY A POZOROVANÁ DÉLKA

4.1 Kontrakce délky

Hledejme vztah mezi délkou l_0 předmětu nacházejícího se v libovolné „pohybující se“ *inerciální soustavě* $S^{(1)}$ a délkou l měřenou z „klidové“ *inerciální soustavy* $S^{(0)}$. K určení délky l využijeme opět světelný paprsek, protože rychlost světla je v obou *inerciálních soustavách* stejná (v obou soustavách platí stejné fyzikální zákony). Nechť se pohyb děje ve směru osy x:



Jak vyplývá z obrázku, v „klidové“ *inerciální soustavě* $S^{(0)}$ platí:

$$u \cdot t_1^{(0)} + l = c \cdot t_1^{(0)} \Rightarrow l = t_1^{(0)}(c-u) \Rightarrow t_1^{(0)} = \frac{l}{c-u}$$

$$l - u \cdot t_2^{(0)} = c \cdot t_2^{(0)} \Rightarrow l = t_2^{(0)}(c+u) \Rightarrow t_2^{(0)} = \frac{l}{c+u}$$

$$t^{(0)} = t_1^{(0)} + t_2^{(0)} = \frac{l}{c-u} + \frac{l}{c+u} = \frac{l(c+u) + l(c-u)}{(c-u)\cdot(c+u)} = \frac{2l \cdot c}{c^2 - u^2}$$

V „pohybující se“ *inerciální soustavě* $S^{(1)}$ platí:

$$2l_0 = c \cdot t^{(1)} \Rightarrow t^{(1)} = \frac{2l_0}{c}$$

Z výrazu (10) pro dilataci času plyne:

$$t^{(0)} = \frac{t^{(1)}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Dosadíme za $t^{(0)}$ a $t^{(1)}$ a upravíme:

$$\frac{2l \cdot c}{c^2 - u^2} = \frac{\frac{2l_0}{c}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

$$l = l_0 \cdot \frac{\frac{c^2 - u^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = l_0 \cdot \frac{1 - \frac{u^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = l_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

$$l = l_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \qquad (11)$$

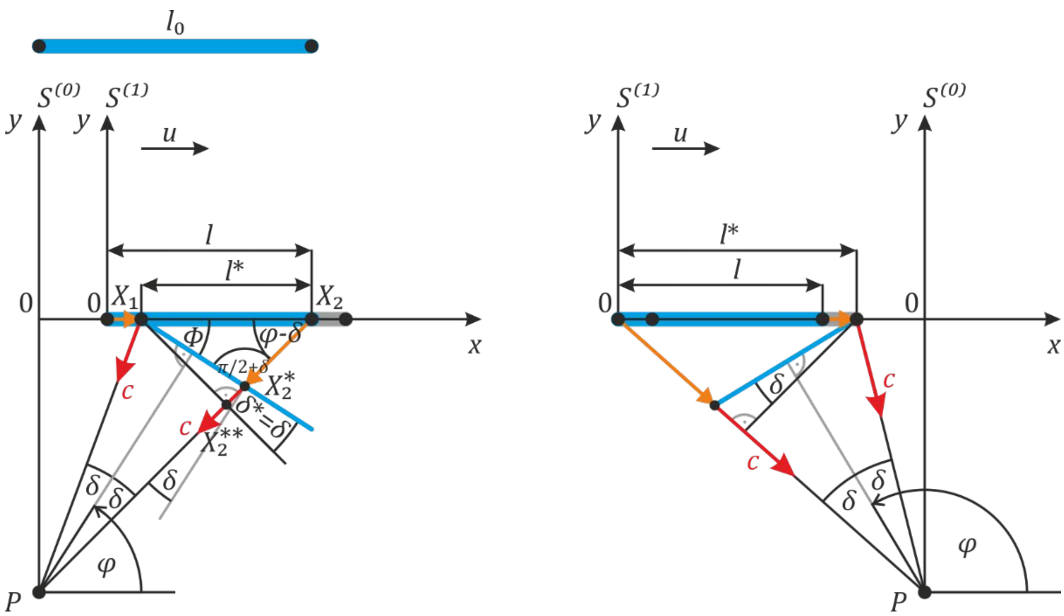
Kde l je délka předmětu ve směru pohybu naměřená z „klidové" *inerciální soustavy* $S^{(0)}$ a l_0 je délka stejného předmětu naměřená v „pohybující se" *inerciální soustavě* $S^{(1)}$.

4.2 Pozorovaná délka

Délku pohybujícího se předmětu ve směru pohybu určenou z „klidové" *inerciální soustavy* $S^{(0)}$ tedy již známe. Jaká je ale jeho pozorovaná délka?

4.2.1 Osa tyče je rovnoběžná se směrem pohybu

Na obrázku je znázorněna pohybující se tyč ve směru osy x. Vzhledem ke konečné rychlosti světla přijme pozorovatel informaci o pozici obou konců tyče v rozdílných časech v závislosti na pozorovacím úhlu φ:



Označme klidovou délku tyče l_0 , délku pohybující se tyče l a délku tyče, kterou vidíme v daném okamžiku l^*. S ohledem na další výpočet si nejprve dokážeme, že úhel $\delta^* = \delta$.

Pro trojúhelník $X_1 X_2 X_2^*$ na obrázku platí:

$$\left(\frac{\pi}{2} + \delta\right) + (\varphi - \delta) + \phi = \pi \;\Rightarrow\; \phi = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

Pro trojúhelník $X_1 X_2 X_2^{**}$ platí:

$$\frac{\pi}{2} + (\varphi - \delta) + (\phi + \delta^*) = \pi$$

První rovnici dosadíme do druhé a dostáváme:

$$\frac{\pi}{2} + (\varphi - \delta) + \left(\frac{\pi}{2} - \varphi + \delta^*\right) = \pi$$
$$\delta^* = \delta$$

Dále předpokládejme, že délka tyče je vůči vzdálenosti pozorování zanedbatelná neboli úhel $\delta \to 0$. Pak na základě tohoto předpokladu a obrázku výše můžeme psát:

$$\frac{l - l^*}{u} \approx \frac{l^* \cdot \cos\varphi}{c}$$
$$\frac{l}{u} - \frac{l^*}{u} \approx \frac{l^* \cdot \cos\varphi}{c}$$
$$\frac{l}{u} \approx l^* \cdot \left(\frac{\cos\varphi}{c} + \frac{1}{u}\right) \Rightarrow l^* \approx \frac{l}{u \cdot \left(\frac{\cos\varphi}{c} + \frac{1}{u}\right)} = \frac{l}{\frac{u \cdot \cos\varphi}{c} + 1} = \frac{l}{1 + \frac{u}{c} \cdot \cos\varphi}$$

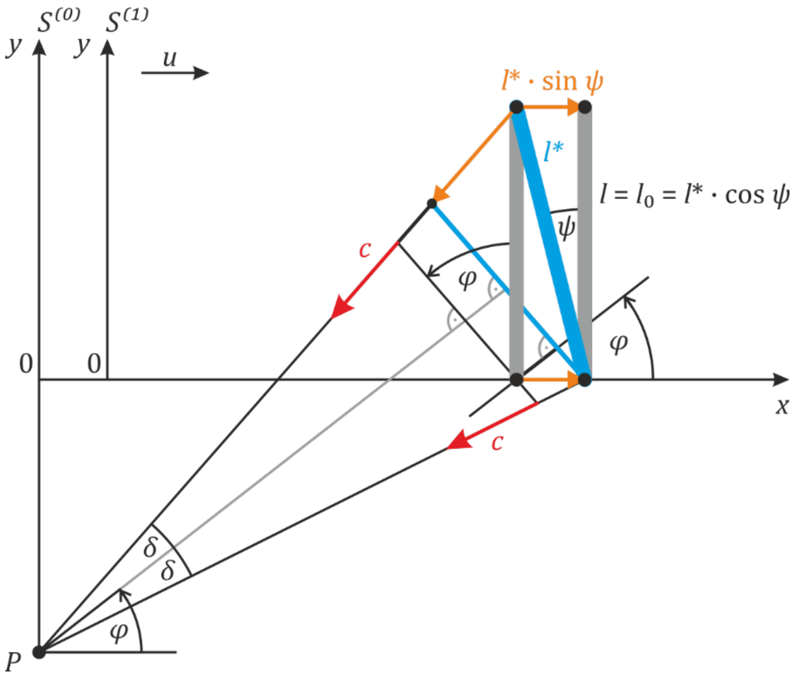
Za l dosadíme výraz (11) pro kontrakci délky a dostáváme

$$l^* \approx \frac{l_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 + \frac{u}{c} \cdot \cos\varphi} \tag{12}$$

Z toho plyne, že pokud se předmět vzdaluje od pozorovatele ($\cos\varphi > 0$), vizuální délka l^* ve směru pohybu je menší než skutečná (kontrahovaná) délka l a naopak, pokud se předmět přibližuje k pozorovateli ($\cos\varphi < 0$), vizuální délka l^* ve směru pohybu je větší než skutečná (kontrahovaná) délka l. Pouze v případě, kdy těleso míjí pozorovatele ($\cos\varphi = 0$), se vizuální délka l^* ve směru pohybu rovná skutečné (kontrahované) délce l.

4.2.2 Osa tyče je kolmá na směr svého pohybu a současně leží v pozorovací rovině

Opět předpokládejme, že délka tyče je vůči vzdálenosti pozorování zanedbatelná neboli úhel $\delta \to 0$.



Pak můžeme psát:

$$\frac{l^* \cdot \sin\psi}{u} \approx \frac{l^* \cdot \cos\psi \cdot \sin\varphi}{c} - \frac{l^* \cdot \sin\psi \cdot \cos\varphi}{c}$$

$$\frac{\sin\psi}{u} \approx \frac{1}{c} \cdot (\cos\psi \cdot \sin\varphi - \sin\psi \cdot \cos\varphi)$$

$$\frac{c}{u} \cdot \sin\psi \approx \sin\varphi \cdot \cos\psi - \cos\varphi \cdot \sin\psi$$

$$\frac{c}{u} \cdot \frac{\sin\psi}{\cos\psi} \approx \sin\varphi - \cos\varphi \cdot \frac{\sin\psi}{\cos\psi}$$

$$\frac{c}{u} \cdot \tan\psi \approx \sin\varphi - \cos\varphi \cdot \tan\psi$$

$$\frac{c}{u} \cdot \tan\psi + \cos\varphi \cdot \tan\psi \approx \sin\varphi$$

$$\tan\psi \cdot \left(\frac{c}{u} + \cos\varphi\right) \approx \sin\varphi \Rightarrow \tan\psi \approx \frac{\sin\varphi}{\frac{c}{u} + \cos\varphi} = \frac{\frac{u}{c} \cdot \sin\varphi}{1 + \frac{u}{c} \cdot \cos\varphi}$$

$$\tan\psi \approx \frac{\frac{u}{c} \cdot \sin\varphi}{1 + \frac{u}{c} \cdot \cos\varphi} \Rightarrow \psi = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{u}{c} \cdot \sin\varphi}{1 + \frac{u}{c} \cdot \cos\varphi}\right)$$

$$l^* = \frac{l_0}{\cos\psi} \approx \frac{l_0}{\cos\left(\tan^{-1}\frac{\frac{u}{c} \cdot \sin\varphi}{1 + \frac{u}{c} \cdot \cos\varphi}\right)} \tag{13}$$

4.2.3 Osa tyče je kolmá na směr svého pohybu i na pozorovací rovinu

V případě, že pozorovací úhel $\varphi = 0$, pak podle výrazu (13) platí:

$$l^* = \frac{l_0}{\cos\left(\tan^{-1}\frac{\frac{u}{c} \cdot \sin\varphi}{1 + \frac{u}{c} \cdot \cos\varphi}\right)} = l_0$$

V tomto případě vidíme tyč ve své „klidové“ velikosti l_0 .

5. RELATIVNOST SOUČASNOSTI NESOUMÍSTNÝCH UDÁLOSTÍ

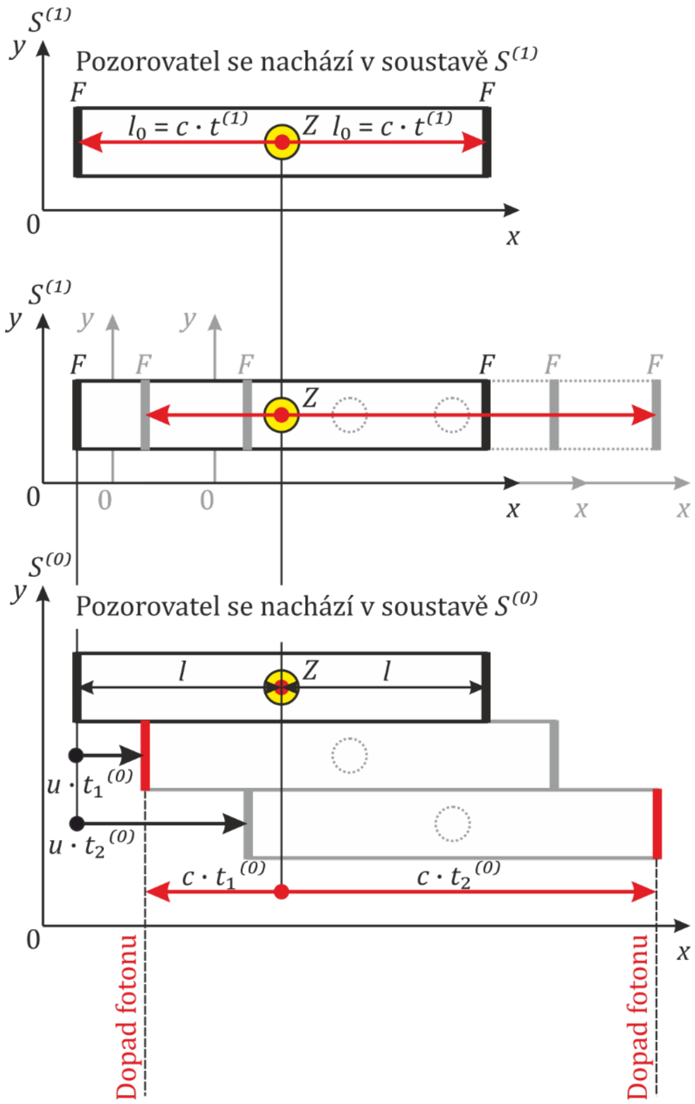
Každá událost může být popsána časoprostorovými souřadnicemi x, y, z, t, kde x, y, z jsou souřadnice události v prostoru a t je souřadnice události v čase. Porovnávání událostí tedy znamená, porovnávat jejich souřadnice x, y, z, t.

5.1 Definice

- Události *soumístné* jsou události, jejichž prostorové souřadnice x, y, z jsou stejné, což znamená, že události nastali v libovolném čase, ale ve stejném místě prostoru.
- Události *současné* jsou události, jejichž časová souřadnice je stejná, což znamená, že události nastali v libovolném místě prostoru, ale ve stejném okamžiku.

5.2 Myšlenkový model

Dvě *nesoumístné* události, které nastali z hlediska pozorovatele nacházejícího se v „pohybující se“ *inerciální soustavě* současně, nejsou současné z hlediska pozorovatele nacházejícího se v „klidové“ *inerciální soustavě*. Připomeňme, že ve všech *inerciálních soustavách* platí stejné fyzikální zákony, to znamená, že i rychlost světla c je ve všech směrech pro pozorovatele, kteří se v nich nachází, stejná. Demonstrujme to na příkladu pohybujícího se objektu rychlostí u ve směru osy x, kde v levé a pravé části jsou umístěné fotobuňky F. Uprostřed je světelný zdroj Z, který v určitém časovém okamžiku vyšle impuls k oběma fotobuňkám. Dopad světelného impulsu na fotobuňky jsou sledované události.



5.2.1 Pozorovatel se nachází v „pohybující se" inerciální soustavě

Z hlediska pozorovatele nacházejícího se v „pohybující se" *inerciální soustavě* $S^{(1)}$ dopadne světelný impuls na obě fotobuňky současně. Okamžik dopadu impulsu na fotobuňky je dán vztahem:

$$t^{(1)} = \frac{l_0}{c}$$

Kde l_0 je vzdálenost světelného zdroje Z od fotobuňky F, c je rychlost světla a $t^{(1)}$ je lokální čas, který uplynul od okamžiku vyslání impulzu světelným zdrojem až po dopad impulsu na fotobuňku. Čas $t^{(0)}$, který uplynul v „klidové" *inerciální soustavě* je dán již odvozeným vztahem (10):

$$t^{(0)} = \frac{t^{(1)}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{\frac{l_0}{c}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

5.2.2 Pozorovatel se nachází v „klidové" inerciální soustavě

Pro pozorovatele nacházející se v „klidové" *inerciální soustavě* $S^{(0)}$ tyto dvě události ale nenastanou současně, protože se objekt pohybuje v tomto případě zleva doprava, takže levá fotobuňka „nadbíhá" světelnému impulsu, kdežto pravá fotobuňka „utíká" světelnému impulsu. Tedy časy dopadů impulsů na fotobuňky jsou rozdílné, a tudíž z hlediska tohoto pozorovatele proběhnou obě události nesoučasně. Vyjádřeme si tedy časy jednotlivých událostí:

$$l = u \cdot t_1^{(0)} + c \cdot t_1^{(0)} = c \cdot t_2^{(0)} - u \cdot t_2^{(0)}$$

$$l = t_1^{(0)} \cdot (c + u) = t_2^{(0)} \cdot (c - u)$$

$$t_1^{(0)} = \frac{l}{c + u};\ t_2^{(0)} = \frac{l}{c - u}$$

Kde l je vzdálenost světelného zdroje od fotobuňky z hlediska pozorovatele v „klidové" *inerciální soustavě*, pro kterou platí již odvozený výraz (11):

$$l = l_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

Po dosazení dostaneme:

$$t_1^{(0)} = \frac{l_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{c + u} \quad ; \quad t_2^{(0)} = \frac{l_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{c - u}$$

5.3 Shrnutí

Z hlediska pozorovatele v soustavě $S^{(1)}$ nastávají obě události současně v lokálním čase soustavy $S^{(1)}$:

$$t^{(1)} = \frac{1}{c} \cdot l_0$$

A v nelokálním čase soustavy $S^{(0)}$:

$$t^{(0)} = \frac{t^{(1)}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{\frac{1}{c}\cdot l_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{\frac{1}{c}\cdot l_0 \cdot \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1-\frac{u^2}{c^2}} = \frac{c}{(c+u)(c-u)}\cdot l_0 \cdot \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \tag{14}$$

Z hlediska pozorovatele v soustavě $S^{(0)}$ se nejedná o současné události, ale o nesoučasné, které nastávají v časech soustavy $t_1^{(0)}, t_2^{(0)}$:

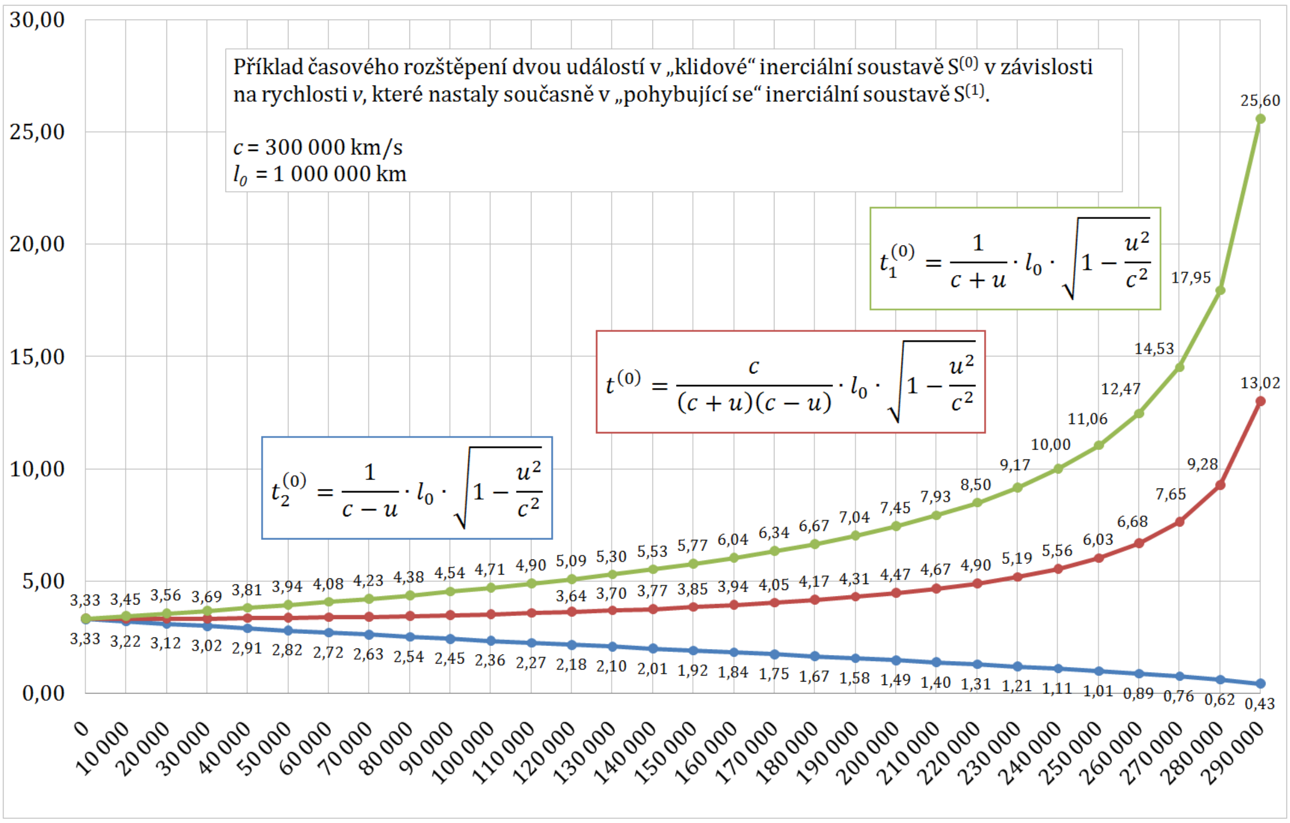
$$t_1^{(0)} = \frac{1}{c+u}\cdot l_0 \cdot \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \tag{15}$$

$$t_2^{(0)} = \frac{1}{c-u}\cdot l_0 \cdot \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \tag{16}$$

Takže můžeme psát:

$$0 \le u < c \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c+u} \le \frac{c}{(c+u)(c-u)} \le \frac{1}{c-u} \\ t_1^{(0)} = \frac{l_0}{c+u}\cdot\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \le t^{(0)} = \frac{c\cdot l_0}{(c+u)(c-u)}\cdot\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \le t_2^{(0)} = \frac{l_0}{c-u}\cdot\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \\ t_1^{(0)} \le t^{(0)} \le t_2^{(0)} \end{array} \right\}$$

Na diagramu je vidět časové „rozštěpení" (vzájemný časový posun) těchto dvou *nesoumístných* událostí v závislosti na rychlosti u z hlediska pozorovatele nacházejícího se v „klidové" *inerciální soustavě* $S^{(0)}$, které nastaly současně v *inerciální soustavě* $S^{(1)}$. Délka l_0 je v tomto příkladu zvolena 1 000 000 km, rychlosti c, u jsou v km/s a časy $t^{(0)}, t_1^{(0)}, t_2^{(0)}$ jsou v sekundách:



6. LORENTZOVA TRANSFORMACE

Galileova transformace vyjadřující převodní vztahy mezi dvěma *inerciálními vztažnými soustavami* je založena na předpokladu absolutního času a prostoru:

$$x^{(1)} = x^{(0)} - u_x \cdot t^{(0)}, y^{(1)} = y^{(0)} - u_y \cdot t^{(0)}, z^{(1)} = z^{(0)} - u_z \cdot t^{(0)}, t^{(1)} = t^{(0)}$$

Protože nepřesnost této transformace se začíná výrazněji projevovat při rychlostech blízkých rychlosti světla, musíme ji nahradit transformací obecnější. Říkáme jí *Lorentzova transformace* podle Hendrika Antoona Lorentze (1853 – 1928), nizozemského fyzika a laureáta Nobelovy ceny za fyziku z roku 1902, jehož nejdůležitější příspěvky se týkaly oblasti elektromagnetismu, elektronové teorie a teorie relativity. Pomocí *Lorentzovy transformace* můžeme studovat děje v různých *inerciálních vztažných soustavách* a nalézt vztah mezi výsledky měření.

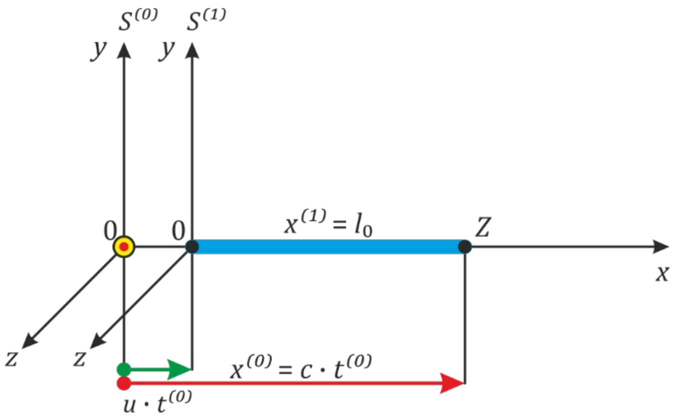
6.1 Transformace časoprostorových souřadnic

Předpokládejme, že:

- *Inerciální soustava* $S^{(1)}$ se pohybuje vůči „klidové“ *inerciální soustavě* $S^{(0)}$ v kladném směru osy x rychlostí $u < c$.
- V čase $t^{(1)} = t^{(0)} = 0$ se oba souřadnicové systémy *inerciálních soustav* $S^{(1)}$ a $S^{(0)}$ kryjí.
- V čase $t^{(1)} = t^{(0)} = 0$ je rovněž vyslán světelný impuls z počátku 0 souřadnicové soustavy v kladném směru osy x .
- Na ose x leží bod Z ve vzdálenosti $x^{(0)}$.

6.1.1 Transformace prostorové souřadnice ve směru pohybu

Hledáme vztah mezi souřadnicemi $x^{(0)}$ a $x^{(1)}$, to znamená vztah pro transformaci souřadnice $x^{(0)}$ ve směru pohybu soustavy $S^{(1)}$. Hledáme tedy funkční výraz $x^{(1)} = f\left[x^{(0)}, t^{(0)}\right]$:



Již víme, že pro kontrakci délky platí výraz (11):

$$l = l_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

Z obrázku a z hlediska pozorovatele v soustavě $S^{(0)}$ plyne:

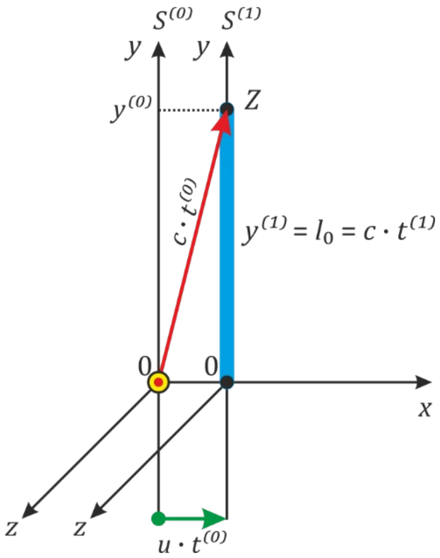
$$x^{(0)} = u \cdot t^{(0)} + l = u \cdot t^{(0)} + l_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = u \cdot t^{(0)} + x^{(1)} \cdot \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \Rightarrow x^{(1)} = \frac{x^{(0)} - u \cdot t^{(0)}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Lorentzův vztah pro transformaci souřadnice $x^{(0)}$ je tedy:

$$x^{(1)} = \frac{x^{(0)} - u \cdot t^{(0)}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \qquad (17)$$

6.1.2 Transformace prostorové souřadnice v kolmém směru vůči pohybu

Dále si ukážeme transformaci v kolmém směru vůči směru pohybu. Hledáme vztahy mezi souřadnicemi $y^{(0)}$ a $y^{(1)}$, $z^{(0)}$ a $z^{(1)}$, to znamená vztahy pro transformaci souřadnic $y^{(0)}$, $z^{(0)}$ v kolmém směru vůči směru pohybu soustavy $S^{(1)}$. Hledáme tedy funkční výrazy $y^{(1)} = f\left[y^{(0)}, t^{(0)}\right]$ a $z^{(1)} = f\left[z^{(0)}, t^{(0)}\right]$.



Z hlediska pozorovatele v soustavě $S^{(0)}$ a z Pythagorovy věty plyne:

$$u^2 \cdot {t^{(0)}}^2 + {y^{(0)}}^2 = c^2 \cdot {t^{(0)}}^2 \Rightarrow {y^{(0)}}^2 = {t^{(0)}}^2 \cdot (c^2 - u^2)$$

Použijeme výraz (10) pro dilataci času

$$t^{(0)} = \frac{t^{(1)}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

který dosadíme do předchozí rovnice a dostáváme:

$${y^{(0)}}^2 = \frac{{t^{(1)}}^2}{1 - \frac{u^2}{c^2}} \cdot (c^2 - u^2)$$

Z hlediska pozorovatele v soustavě $S^{(1)}$ platí:

$$l_0 = y^{(1)} = c \cdot t^{(1)} \Rightarrow t^{(1)} = \frac{y^{(1)}}{c}$$

Po dosazení do předchozího výrazu dostáváme:

$$y^{(0)^2} = \frac{\left(\frac{y^{(1)}}{c}\right)^2}{1 - \frac{u^2}{c^2}} \cdot (c^2 - u^2) = \frac{\frac{y^{(1)^2}}{c^2}}{\frac{c^2 - u^2}{c^2}} \cdot (c^2 - u^2) = \frac{y^{(1)^2}}{c^2 - u^2} \cdot (c^2 - u^2) = y^{(1)^2}$$

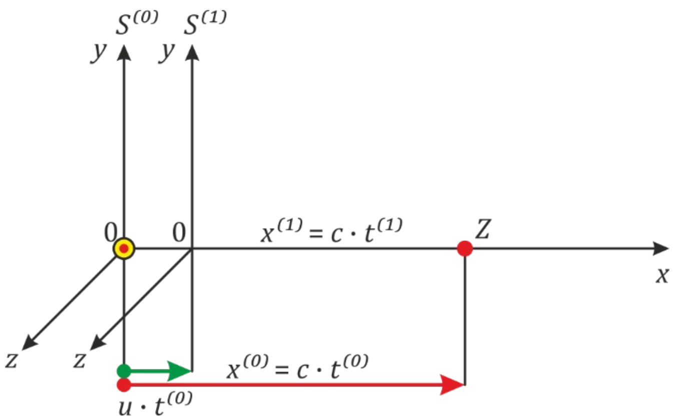
$$y^{(1)} = y^{(0)} \quad (18)$$

Podobně to platí i pro souřadnici z, která je rovněž kolmá ke směru pohybu:

$$z^{(1)} = z^{(0)} \quad (19)$$

6.1.3 Transformace časové souřadnice události

Hledáme vztah mezi časy události $t^{(0)}$ a $t^{(1)}$, což je dopad světelného impulsu v bodě Z. Hledáme tedy funkční výraz $t^{(1)} = f\left[x^{(0)}, t^{(0)}\right]$:



Z obrázku a z výrazu (17) Lorentzova vztahu pro transformaci souřadnic plyne:

$$x^{(0)} = c \cdot t^{(0)} \Rightarrow t^{(0)} = \frac{x^{(0)}}{c}$$

$$x^{(1)} = c \cdot t^{(1)} \Rightarrow t^{(1)} = \frac{x^{(1)}}{c} = \frac{\frac{x^{(0)} - u \cdot t^{(0)}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}}{c} = \frac{\frac{x^{(0)} - u \cdot t^{(0)}}{c}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{\frac{x^{(0)}}{c} - \frac{u \cdot t^{(0)}}{c^2} \cdot c}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{t^{(0)} - \frac{u}{c^2} \cdot x^{(0)}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Lorentzův vztah pro transformaci času $t^{(0)}$ má tedy tvar:

$$t^{(1)} = \frac{t^{(0)} - \frac{u}{c^2} \cdot x^{(0)}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \quad (20)$$

6.2 Inverzní Lorenzova transformace

Z výrazů (17) a (20) pro *Lorentzovu transformaci* prostorové a časové souřadnice vyjádříme $x^{(0)}$ a $t^{(0)}$:

$$\text{(a)}\quad x^{(1)}=\frac{x^{(0)}-ut^{(0)}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\Rightarrow x^{(0)}=x^{(1)}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}+ut^{(0)}=x^{(1)}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}+u\left(t^{(1)}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}+\frac{u}{c^2}x^{(0)}\right)$$

$$\text{(b)}\quad t^{(1)}=\frac{t^{(0)}-\frac{u}{c^2}x^{(0)}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\Rightarrow t^{(0)}=t^{(1)}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}+\frac{u}{c^2}x^{(0)}=t^{(1)}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}+\frac{u}{c^2}\left(x^{(1)}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}+ut^{(0)}\right)$$

Upravíme výraz (a):

$$x^{(0)}=x^{(1)}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}+u\left(t^{(1)}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}+\frac{u}{c^2}x^{(0)}\right)=x^{(1)}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}+ut^{(1)}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}+\frac{u^2}{c^2}x^{(0)}$$

$$=\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\cdot\left(x^{(1)}+ut^{(1)}\right)+\frac{u^2}{c^2}x^{(0)}$$

$$x^{(0)}-\frac{u^2}{c^2}x^{(0)}=\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\cdot\left(x^{(1)}+ut^{(1)}\right)$$

$$x^{(0)}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)=\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\cdot\left(x^{(1)}+ut^{(1)}\right)$$

$$x^{(0)}=\frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\cdot\left(x^{(1)}+ut^{(1)}\right)}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}=\frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\cdot\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\cdot\left(x^{(1)}+ut^{(1)}\right)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\cdot\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}=\frac{x^{(1)}+ut^{(1)}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

Dostáváme tak *inverzní Lorentzovu transformaci* pro souřadnici $x^{(0)}$:

$$x^{(0)}=\frac{x^{(1)}+ut^{(1)}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\tag{21}$$

Upravíme výraz (b):

$$t^{(0)}=t^{(1)}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}+\frac{u}{c^2}\left(x^{(1)}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}+ut^{(0)}\right)=t^{(1)}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}+\frac{u}{c^2}x^{(1)}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}+\frac{u^2}{c^2}t^{(0)}$$

$$=\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\cdot\left(t^{(1)}+\frac{u}{c^2}x^{(1)}\right)+\frac{u^2}{c^2}t^{(0)}$$

$$t^{(0)}-\frac{u^2}{c^2}t^{(0)}=\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\cdot\left(t^{(1)}+\frac{u}{c^2}\cdot x^{(1)}\right)$$

$$t^{(0)}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)=\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\cdot\left(t^{(1)}+\frac{u}{c^2}\cdot x^{(1)}\right)$$

$$t^{(0)} = \frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \cdot \left(t^{(1)} + \frac{u}{c^2}x^{(1)}\right)}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)} = \frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \cdot \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \cdot \left(t^{(1)} + \frac{u}{c^2}x^{(1)}\right)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \cdot \left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)} = \frac{t^{(1)} + \frac{u}{c^2}x^{(1)}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

Dostáváme tak *inverzní Lorentzovu transformaci* pro souřadnici $t^{(0)}$:

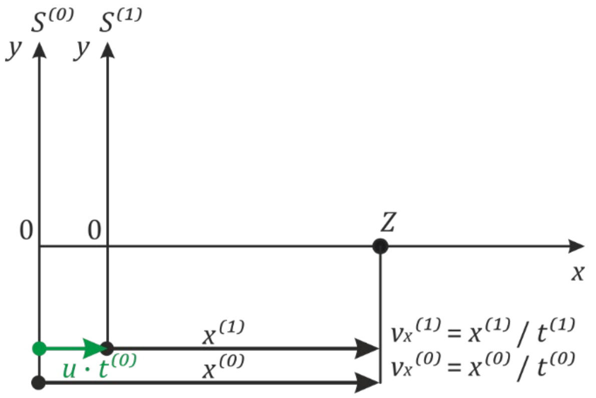
$$t^{(0)} = \frac{t^{(1)} + \frac{u}{c^2}x^{(1)}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \tag{22}$$

7. SKLÁDÁNÍ RYCHLOSTÍ

Při klasickém skládání rychlostí by rychlost světla nemohla zůstat stejná ve všech *inerciálních soustavách*. Proto pro odvození vztahu použijeme *Inverzní Lorentzovu transformaci*.

Předpokládejme, že:

- *Inerciální soustava* $S^{(1)}$ se pohybuje vůči soustavě $S^{(0)}$ v kladném směru osy x rychlostí $u < c$.
- Ve směru osy x se pohybuje částice Z v soustavě $S^{(0)}$ rychlostí $v_x^{(0)}$ a v soustavě $S^{(1)}$ rychlosti $v_x^{(1)}$.
- Počátek měření je v čase $t^{(1)} = t^{(0)} = 0$.



Pro rychlost $v_x{}^{(1)}$ částice Z v soustavě $S^{(1)}$ a rychlost $v_x{}^{(0)}$ stejné částice Z v soustavě $S^{(0)}$ platí:

$$v_x{}^{(1)} = \frac{x^{(1)}}{t^{(1)}} \quad ; \quad v_x{}^{(0)} = \frac{x^{(0)}}{t^{(0)}}$$

Hledáme vztah mezi rychlostí $v_x{}^{(0)}$ částice Z změřenou v soustavě $S^{(0)}$ a rychlostí $v_x{}^{(1)}$ stejné částice Z změřenou v soustavě $S^{(1)}$ neboli $v_x{}^{(0)} = f\left[u, v_x{}^{(1)}\right]$. Z obrázku plyne:

$$v_x{}^{(0)} = \frac{x^{(0)}}{t^{(0)}} \tag{23}$$

7.1 Skládání rychlostí

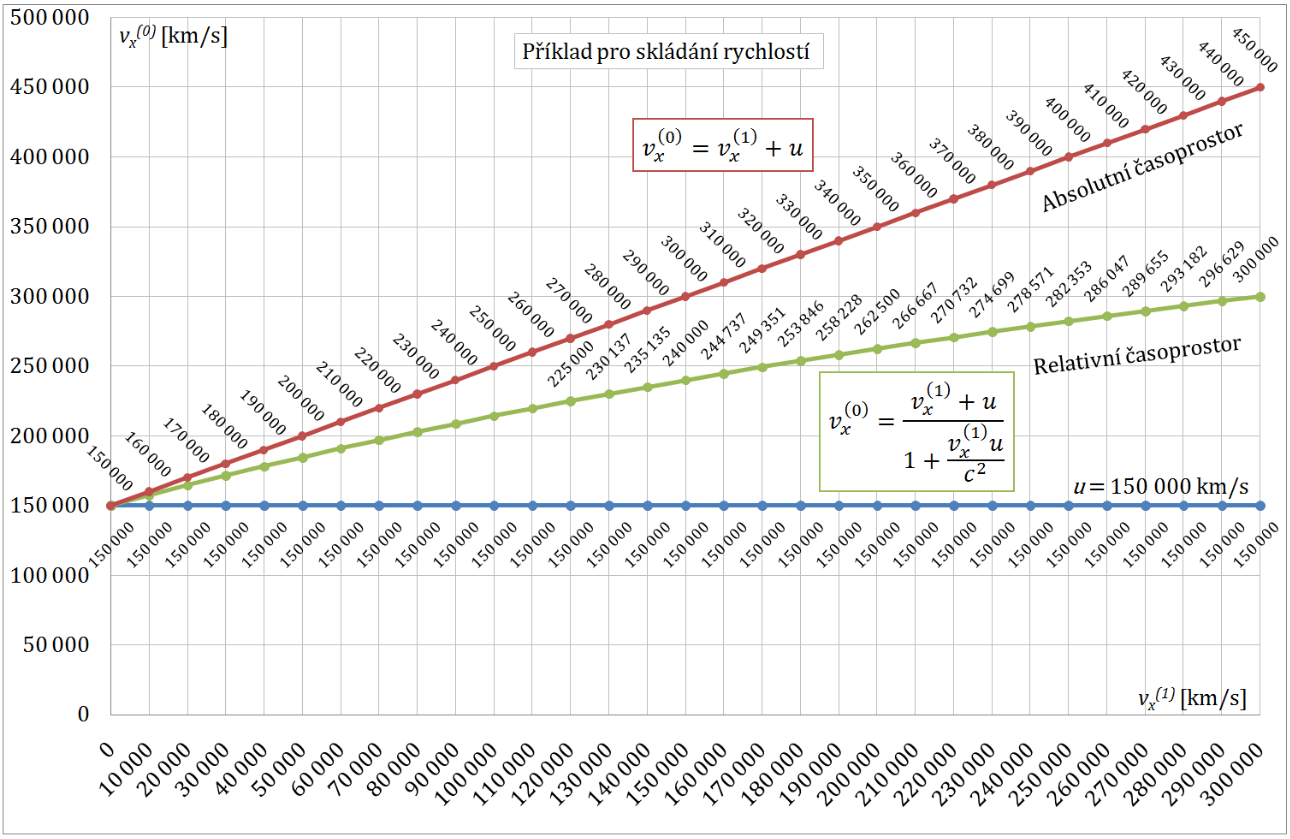
7.1.1 Rovnoměrný pohyb tělesa rovnoběžný se směrem pohybu soustavy $S^{(1)}$

Výrazy (21) a (22) dosadíme do výrazu (23) a dostaneme:

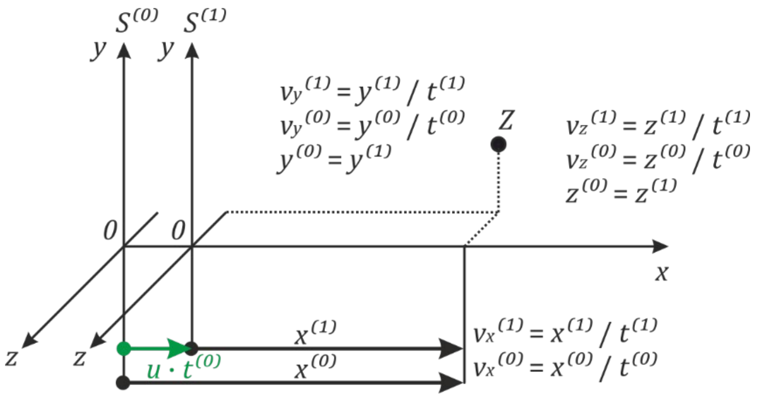
$$v_x^{(0)} = \frac{x^{(0)}}{t^{(0)}} = \frac{\dfrac{x^{(1)} + ut^{(1)}}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}}{\dfrac{t^{(1)} + \dfrac{u}{c^2}x^{(1)}}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}} = \frac{x^{(1)} + ut^{(1)}}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}} \cdot \frac{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}{t^{(1)} + \dfrac{u}{c^2}x^{(1)}} = \frac{x^{(1)} + ut^{(1)}}{t^{(1)} + \dfrac{u}{c^2}x^{(1)}} = \frac{\dfrac{x^{(1)}}{t^{(1)}} + \dfrac{ut^{(1)}}{t^{(1)}}}{\dfrac{t^{(1)}}{t^{(1)}} + \dfrac{ux^{(1)}}{t^{(1)}c^2}} = \frac{v_x^{(1)} + u}{1 + \dfrac{u}{c^2}v_x^{(1)}}$$

Hledaný výraz pro rychlost $v_x^{(0)}$ částice Z v soustavě $S^{(0)}$ jako funkce rychlosti $v_x^{(1)}$ stejné částice Z v soustavě $S^{(1)}$ a rychlosti u soustavy $S^{(1)}$ vůči soustavě $S^{(0)}$ pak je:

$$v_x^{(0)} = \frac{v_x^{(1)} + u}{1 + \frac{u}{c^2} v_x^{(1)}} \tag{24}$$



7.1.2 Rovnoměrný pohyb tělesa v libovolném směru soustavy $S^{(1)}$



$$v_y^{(0)} = \frac{y^{(0)}}{t^{(0)}} = \frac{y^{(1)}}{\dfrac{t^{(1)} + \frac{u}{c^2} x^{(1)}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}} = \frac{y^{(1)} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{t^{(1)} + \frac{u}{c^2} x^{(1)}} = \frac{y^{(1)} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{t^{(1)} \left(1 + \frac{u x^{(1)}}{t^{(1)} c^2}\right)} = \frac{v_y^{(1)} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 + \frac{u x^{(1)}}{t^{(1)} c^2}} = \frac{v_y^{(1)} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 + \frac{u}{c^2} v_x^{(1)}}$$

Hledaný výraz pro rychlost $v_y^{(0)}$ částice Z v soustavě $S^{(0)}$ jako funkce rychlosti $v_x^{(1)}$, $v_y^{(1)}$ částice Z v soustavě $S^{(1)}$ a rychlosti u soustavy $S^{(1)}$ vůči soustavě $S^{(0)}$ pak je:

$$v_y^{(0)} = \frac{v_y^{(1)}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1+\frac{u}{c^2}v_x^{(1)}} \tag{25}$$

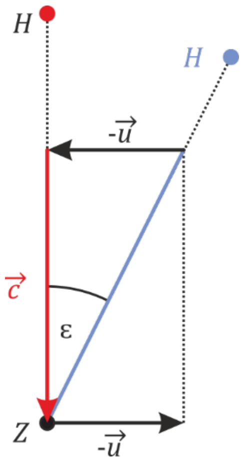
Stejným způsobem bychom provedli výpočet i pro složku rychlosti ve směru osy z s výsledkem:

$$v_z^{(0)} = \frac{v_z^{(1)}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1+\frac{u}{c^2}v_x^{(1)}} \tag{26}$$

8. ABERACE

Aberace neboli odchylka je výsledkem vektorového skládání rychlostí. Příkladem může být pohyb člověka v dešti, kdy kapky padají svisle dolů a člověk se pohybuje vodorovně vpřed. Dochází k vektorovému skládání rychlosti padajících kapek s rychlosti pohybu člověka. V tomto případě bude mít člověk mokrou přední část těla, kdežto zadní zůstane suchá, protože kapky se pohybují vůči němu šikmo (proti směru jeho pohybu).

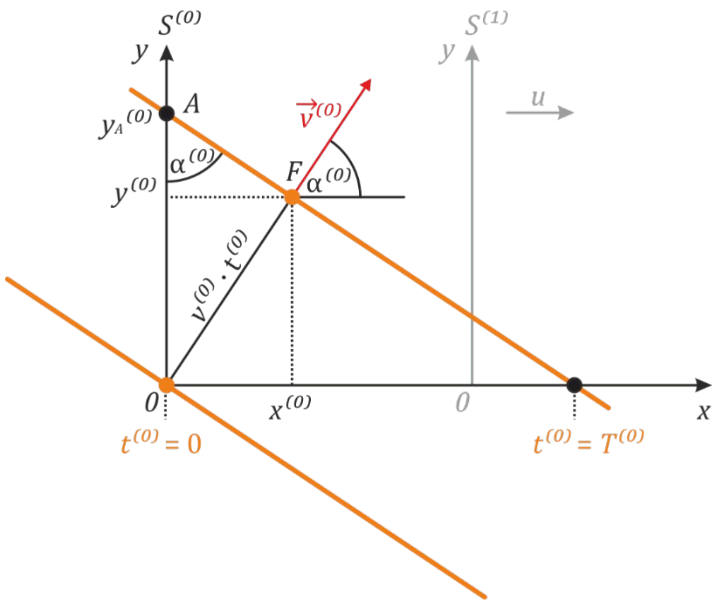
Podobné je to se světlem vzdálených hvězd. Při pohybu Země kolem Slunce dochází ke zdánlivému pohybu hvězdy po elipse, jejíž velká poloosa má velikost odpovídající úhlu $\varepsilon = 20{,}5''$. Je to důsledek ročního pohybu Země kolem Slunce. Zdánlivá rychlost pohybu hvězdy po této elipse se mění a je největší v okamžiku, kdy světlo hvězdy dopadá kolmo na směr pohybu pozorovatele. Dochází k tomu dvakrát ročně.



Pro velikost *aberace* pro hvězdu nacházející se v nadhlavníku platí přibližně:

$$\tan \varepsilon = \frac{u}{c}$$

Kde u je rychlost pohybu Země kolem Slunce a c je rychlost světla ve vakuu. Pro přesnější výpočet úhlové odchylky bychom museli uvažovat také rotaci Země a pohyb celé Sluneční soustavy. Na obrázku vidíme postup obecné rovinné vlny v čase vzhledem k pozorovateli:



8.1 Pozorovatel se nachází v „klidové“ inerciální soustavě

Hledejme vztah, který bude popisovat postup této obecné rovinné vlny v čase z hlediska pozorovatele nacházejícího se v „klidové“ *inerciální soustavě* $S^{(0)}$. Podle obrázku platí:

$$\tan\alpha^{(0)} = \frac{x^{(0)}}{y_A^{(0)} - y^{(0)}} \Rightarrow y_A^{(0)} = \frac{x^{(0)}}{\tan\alpha^{(0)}} + y^{(0)}$$

$$\sin\alpha^{(0)} = \frac{v^{(0)} \cdot t^{(0)}}{y_A^{(0)}} \Rightarrow y_A^{(0)} = \frac{v^{(0)} \cdot t^{(0)}}{\sin\alpha^{(0)}}$$

Vyloučením y_A dostaneme rovnici přímky představující čelo vlny:

$$\frac{x^{(0)}}{\tan\alpha^{(0)}} + y^{(0)} = \frac{v^{(0)} \cdot t^{(0)}}{\sin\alpha^{(0)}}$$

$$y^{(0)} = \frac{v^{(0)}}{\sin\alpha^{(0)}} \cdot t^{(0)} - \frac{1}{\tan\alpha^{(0)}} \cdot x^{(0)} \tag{27}$$

8.2 Pozorovatel se nachází v „pohybující se“ inerciální soustavě

Z hlediska pozorovatele v „pohybující se“ *inerciální soustavě* $S^{(1)}$ rychlostí u ve směru osy x dostaneme po dosazení *inverzní Lorentzovy transformace* (21) a (22) pro souřadnici $x^{(0)}$ a $t^{(0)}$ výraz:

$$y^{(1)} = y^{(0)} = \frac{v^{(0)}}{\sin\alpha^{(0)}} \cdot \frac{t^{(1)} + \frac{u}{c^2}x^{(1)}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - \frac{1}{\tan\alpha^{(0)}} \cdot \frac{x^{(1)} + ut^{(1)}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{v^{(0)}t^{(1)} + \frac{v^{(0)}u}{c^2}x^{(1)}}{\sin\alpha^{(0)}\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - \frac{x^{(1)} + ut^{(1)}}{\frac{\sin\alpha^{(0)}}{\cos\alpha^{(0)}}\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

$$= \frac{v^{(0)}t^{(1)} + \frac{v^{(0)}u}{c^2}x^{(1)} - \cos\alpha^{(0)}\left(x^{(1)} + ut^{(1)}\right)}{\sin\alpha_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

$$= \frac{v^{(0)}t^{(1)} + \frac{v^{(0)}u}{c^2} \cdot x^{(1)} - \cos\alpha^{(0)} \cdot x^{(1)} - \cos\alpha^{(0)} \cdot ut^{(1)}}{\sin\alpha^{(0)}\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

$$= \frac{1}{\sin\alpha^{(0)}\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \cdot \left[\left(-u\cos\alpha^{(0)} + v^{(0)}\right)t^{(1)} - \left(\cos\alpha^{(0)} - \frac{v^{(0)}u}{c^2}\right)x^{(1)}\right]$$

$$y^{(1)} = y^{(0)} = \frac{v^{(0)} - u\cos\alpha^{(0)}}{\sin\alpha^{(0)}\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \cdot t^{(1)} - \frac{\cos\alpha^{(0)} - \frac{v^{(0)}u}{c^2}}{\sin\alpha^{(0)}\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \cdot x^{(1)} \tag{28}$$

Pro pozorovatele v „pohybující se“ *inerciální soustavě* $S^{(1)}$ platí formálně stejný výraz jako pro pozorovatele v „klidové“ *inerciální soustavě* $S^{(0)}$. Technicky vzato se zamění $x^{(0)}, y^{(0)}, t^{(0)}, v^{(0)}, \alpha^{(0)}$ za $x^{(1)}, y^{(1)}, t^{(1)}, v^{(1)}, \alpha^{(1)}$:

$$y^{(1)} = \frac{v^{(1)}}{\sin\alpha^{(1)}} \cdot t^{(1)} - \frac{1}{\tan\alpha^{(1)}} \cdot x^{(1)} \tag{29}$$

Dále odvodíme vztahy mezi úhly $\alpha^{(0)}, \alpha^{(1)}$ a rychlostmi $v^{(0)}, v^{(1)}$, které získáme porovnáním výrazů (29) a (28):

$$\frac{v^{(1)}}{\sin\alpha^{(1)}}\cdot t^{(1)} - \frac{1}{\tan\alpha^{(1)}}\cdot x^{(1)} = \frac{v^{(0)} - u\cos\alpha^{(0)}}{\sin\alpha^{(0)}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\cdot t^{(1)} - \frac{\cos\alpha^{(0)} - \frac{v^{(0)}u}{c^2}}{\sin\alpha^{(0)}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\cdot x^{(1)} \tag{30}$$

Z porovnání druhých (červených) členů levé a pravé strany rovnice (30) plyne:

$$\frac{1}{\tan\alpha^{(1)}} = \frac{\cos\alpha^{(0)} - \frac{v^{(0)}u}{c^2}}{\sin\alpha^{(0)}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

$$\tan\alpha^{(1)} = \frac{\sin\alpha^{(0)}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{\cos\alpha^{(0)} - \frac{v^{(0)}u}{c^2}} \tag{31}$$

Z předchozího výrazu (31) vyjádříme $\sin\alpha^{(1)}$:

$$\tan\alpha^{(1)} = \frac{\sin\alpha^{(1)}}{\cos\alpha^{(1)}} = \frac{\sin\alpha^{(1)}}{\sqrt{1-\sin^2\alpha^{(1)}}} = \frac{\sin\alpha^{(0)}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{\cos\alpha^{(0)} - \frac{v^{(0)}u}{c^2}}$$

$$\sin^2\alpha^{(1)} = \left(1-\sin^2\alpha^{(1)}\right)\cdot\left(\frac{\sin\alpha^{(0)}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{\cos\alpha^{(0)} - \frac{v^{(0)}u}{c^2}}\right)^2$$

$$\sin^2\alpha^{(1)} = \left(\frac{\sin\alpha^{(0)}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{\cos\alpha^{(0)} - \frac{v^{(0)}u}{c^2}}\right)^2 - \sin^2\alpha^{(1)}\left(\frac{\sin\alpha^{(0)}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{\cos\alpha^{(0)} - \frac{v^{(0)}u}{c^2}}\right)^2$$

$$\sin^2\alpha^{(1)}\cdot\left[1+\left(\frac{\sin\alpha^{(0)}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{\cos\alpha^{(0)} - \frac{v^{(0)}u}{c^2}}\right)^2\right] = \left(\frac{\sin\alpha^{(0)}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{\cos\alpha^{(0)} - \frac{v^{(0)}u}{c^2}}\right)^2$$

$$\sin\alpha^{(1)} = \frac{\frac{\sin\alpha^{(0)}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{\cos\alpha^{(0)} - \frac{v^{(0)}u}{c^2}}}{\sqrt{1+\left(\frac{\sin\alpha^{(0)}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{\cos\alpha^{(0)} - \frac{v^{(0)}u}{c^2}}\right)^2}} = \frac{\frac{\sin\alpha^{(0)}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{\cos\alpha^{(0)} - \frac{v^{(0)}u}{c^2}}}{\sqrt{1+\frac{\sin^2\alpha^{(0)}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}{\left(\cos\alpha^{(0)} - \frac{v^{(0)}u}{c^2}\right)^2}}}$$

$$= \frac{\frac{\sin\alpha^{(0)}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{\cos\alpha^{(0)}-\frac{v^{(0)}u}{c^2}}}{\sqrt{\frac{\left(\cos\alpha^{(0)}-\frac{v^{(0)}u}{c^2}\right)^2+\sin^2\alpha^{(0)}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}{\left(\cos\alpha^{(0)}-\frac{v^{(0)}u}{c^2}\right)^2}}} = \frac{\sin\alpha^{(0)}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{\sqrt{\left(\cos\alpha^{(0)}-\frac{v^{(0)}u}{c^2}\right)^2+\sin^2\alpha^{(0)}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}}$$

$$\sin\alpha^{(1)} = \frac{\sin\alpha^{(0)}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{\sqrt{\sin^2\alpha^{(0)}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)+\left(\cos\alpha^{(0)}-\frac{v^{(0)}u}{c^2}\right)^2}} \tag{32}$$

Porovnáním prvních (modrých) členů levé a pravé strany rovnice (30), dosazením výrazu (32) a úpravou dostaneme:

$$\frac{v^{(1)}}{\sin\alpha^{(1)}} = \frac{v^{(0)}-u\cos\alpha_0}{\sin\alpha^{(0)}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

$$v^{(1)} = \sin\alpha^{(1)}\cdot\frac{v^{(0)}-u\cos\alpha_0}{\sin\alpha^{(0)}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{\sin\alpha^{(0)}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{\sqrt{\sin^2\alpha^{(0)}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)+\left(\cos\alpha^{(0)}-\frac{v^{(0)}u}{c^2}\right)^2}}\cdot\frac{v^{(0)}-u\cos\alpha^{(0)}}{\sin\alpha^{(0)}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

$$v^{(1)} = \frac{v^{(0)}-u\cos\alpha^{(0)}}{\sqrt{\sin^2\alpha^{(0)}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)+\left(\cos\alpha^{(0)}-\frac{v^{(0)}u}{c^2}\right)^2}} \tag{33}$$

Ukažme nyní případ, kdy se rovinná vlna pohybuje rychlostí světla, to znamená, že $v^{(0)} = c$. Takže podle toho upravíme výrazy (31), (32) a (33):

$$\tan\alpha^{(1)} = \frac{\sin\alpha^{(0)}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{\cos\alpha^{(0)}-\frac{v^{(0)}u}{c^2}} = \frac{\sin\alpha^{(0)}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{\cos\alpha^{(0)}-\frac{u}{c}}$$

$$\sin\alpha^{(1)} = \frac{\sin\alpha^{(0)}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{\sqrt{\sin^2\alpha^{(0)}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)+\left(\cos\alpha^{(0)}-\frac{v^{(0)}u}{c^2}\right)^2}} = \frac{\sin\alpha^{(0)}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{\sqrt{\sin^2\alpha^{(0)}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)+\left(\cos\alpha^{(0)}-\frac{u}{c}\right)^2}}$$

$$= \frac{\sin\alpha^{(0)}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{\sqrt{\sin^2\alpha^{(0)}-\sin^2\alpha^{(0)}\cdot\frac{u^2}{c^2}+\cos^2\alpha^{(0)}-2\cos\alpha^{(0)}\cdot\frac{u}{c}+\frac{u^2}{c^2}}}$$

$$= \frac{\sin\alpha^{(0)}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{\sqrt{1-sin^2\,\alpha^{(0)}\cdot\frac{u^2}{c^2}-2\,cos\,\alpha^{(0)}\cdot\frac{u}{c}+\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{\sin\alpha^{(0)}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{\sqrt{1+\frac{u^2}{c^2}(1-sin^2\,\alpha^{(0)})-2\,cos\,\alpha^{(0)}\cdot\frac{u}{c}}}$$

$$= \frac{\sin\alpha^{(0)}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{\sqrt{1+\frac{u^2}{c^2}cos^2\,\alpha^{(0)}-2\,cos\,\alpha^{(0)}\cdot\frac{u}{c}}} = \frac{\sin\alpha^{(0)}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{\sqrt{\left(1-\frac{u}{c}cos\,\alpha^{(0)}\right)^2}} = \frac{\sin\alpha^{(0)}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1-\frac{u}{c}cos\,\alpha^{(0)}}$$

$$v^{(1)} = \frac{v^{(0)}-u\cos\alpha^{(0)}}{\sqrt{sin^2\,\alpha^{(0)}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)+\left(cos\,\alpha^{(0)}-\frac{v^{(0)}u}{c^2}\right)^2}} = \frac{c-u\cos\alpha^{(0)}}{\sqrt{sin^2\,\alpha^{(0)}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)+\left(cos\,\alpha^{(0)}-\frac{u}{c}\right)^2}}$$

$$= \frac{c-u\cos\alpha^{(0)}}{\sqrt{sin^2\,\alpha^{(0)}-sin^2\,\alpha^{(0)}\cdot\frac{u^2}{c^2}+cos^2\,\alpha^{(0)}-2\,cos\,\alpha^{(0)}\cdot\frac{u}{c}+\frac{u^2}{c^2}}}$$

$$= \frac{c-u\cos\alpha^{(0)}}{\sqrt{1-sin^2\,\alpha^{(0)}\cdot\frac{u^2}{c^2}-2\,cos\,\alpha^{(0)}\cdot\frac{u}{c}+\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{c-u\cos\alpha^{(0)}}{\sqrt{1+\frac{u^2}{c^2}(1-sin^2\,\alpha^{(0)})-2\,cos\,\alpha^{(0)}\cdot\frac{u}{c}}}$$

$$= \frac{c-u\cos\alpha^{(0)}}{\sqrt{1+\frac{u^2}{c^2}cos^2\,\alpha^{(0)}-2\,cos\,\alpha^{(0)}\cdot\frac{u}{c}}} = \frac{c-u\cos\alpha^{(0)}}{\sqrt{\left(1-\frac{u}{c}cos\,\alpha^{(0)}\right)^2}} = \frac{c-u\cos\alpha^{(0)}}{1-\frac{u}{c}cos\,\alpha^{(0)}} = \frac{c-u\cos\alpha^{(0)}}{\frac{c-u\,cos\,\alpha^{(0)}}{c}} = c$$

Takže pro $v^{(0)} = c$ můžeme souhrnně napsat:

$$\tan\alpha^{(1)} = \frac{\sin\alpha^{(0)}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{\cos\alpha^{(0)}-\frac{u}{c}}$$

$$\sin\alpha^{(1)} = \frac{\sin\alpha^{(0)}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1-\frac{u}{c}cos\,\alpha^{(0)}} \qquad (34)$$

$$v^{(1)} = c$$

Ukažme ještě případ, kdy se rovinná vlna pohybuje rychlostí světla ($v^{(0)} = c$) kolmo k ose x, to znamená, že úhel $\alpha^{(0)} = \pi/2$ a $\alpha^{(1)} = \pi/2$ +ε, kde ε je odchylka vlny od svislého směru neboli *aberace*:

$$\tan\alpha^{(1)} = \tan\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right) = -\cot\varepsilon = -\frac{1}{\tan\varepsilon} = \frac{\sin\alpha^{(0)}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{\cos\alpha^{(0)}-\frac{u}{c}} = -\frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{\frac{u}{c}}$$

$$\tan\varepsilon = \frac{u}{c\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \qquad (35)$$

Pro rychlost $u \ll c$ můžeme psát:

$$\tan\varepsilon \cong \frac{u}{c}$$

Což je vztah uvedený v úvodu této kapitoly, který byl odvozen historicky z pozorování.

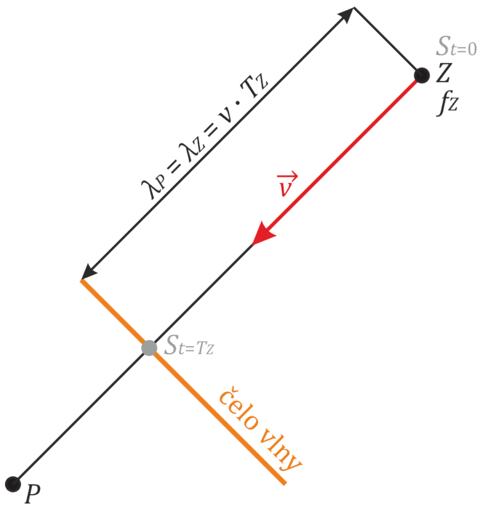
9. DOPPLERŮV JEV

Dopplerův jev popisuje změnu frekvence a vlnové délky přijímaného vlnění oproti vysílanému, která je způsobena nenulovou vzájemnou rychlostí vysílače a přijímače. V roce 1842 jej popsal Christian Doppler.

9.1 Dopplerův jev v klasické fyzice

9.1.1 „Nehybný“ pozorovatel a „nehybný“ zdroj

Nechť jsou zdroj Z periodického vlnění o frekvenci f_Z a pozorovatel P ve vzájemném klidu.



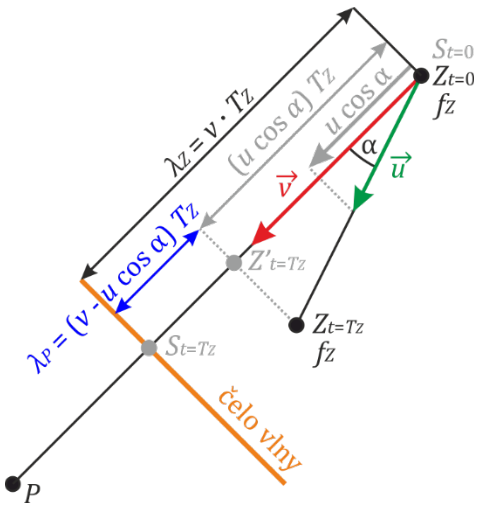
Vlnová délka λ_P a frekvence f_P naměřené pozorovatelem P jsou dány vztahy:

$$\lambda_P = \lambda_Z = v \cdot T_Z \quad ; \quad f_P = f_Z = \frac{1}{T_Z} \tag{36}$$

Kde v je rychlost šíření vlny a T_Z je perioda signálu zdroje (doba trvání jedné periody kmitu). λ_P je tedy vzdálenost mezi bodem $S_{t=0}$ označující polohu čela vlny zdroje Z v okamžiku vyslání signálu v čase $t = 0$ a bodem $S_{t=T_Z}$ označující polohu čela vlny po jedné periodě kmitu, to znamená v čase $t = T_Z$.

9.1.2 „Nehybný“ pozorovatel a „pohybující se“ zdroj

Nechť se zdroj Z periodického vlnění o frekvenci f_Z a rychlosti šíření vlny $\vec{v}$ pohybuje vzhledem k pozorovateli P rychlostí $\vec{u}$ svírající úhel α se směrem $Z_{t=0} \rightarrow P$:



Vlnová délka λ_Z a frekvence f_Z zdroje jsou dány vztahy:

$$\lambda_Z = v \cdot T_Z \quad ; \quad f_Z = \frac{1}{T_Z}$$

Vlnová délka λ_P, kterou naměří pozorovatel P, je dána vztahem:

$$\lambda_P = v \cdot T_Z - u \cos\alpha \cdot T_Z = (v - u\cos\alpha) \cdot T_Z$$

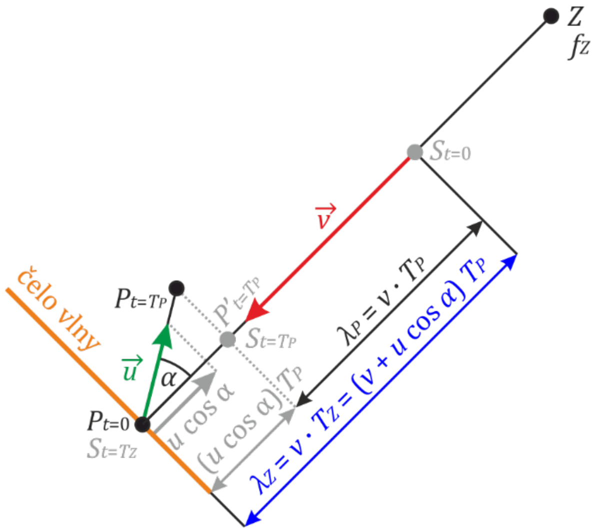
Zdroj se tedy posune během doby jedné periody T_Z trvání signálu z polohy $Z_{t=0}$ do polohy $Z_{t=T_Z}$. Situaci si lze tedy představit tak, jakoby se zdroj trvale nacházel v bodě $Z'_{t=T_Z}$ a rychlost šíření vlny $\vec{v}$ byla snížena právě o průmět rychlosti $\vec{u}$ skutečného pohybu zdroje Z do směru pozorování $P \rightarrow Z_{t=0}$. Frekvence signálu f_P, kterou naměří pozorovatel P a perioda signálu T_P, jsou:

$$f_P = \frac{v}{\lambda_P} = \frac{v}{(v - u\cos\alpha) \cdot T_Z} = \frac{1}{T_Z} \cdot \frac{1}{\frac{v - u\cos\alpha}{v}} = \frac{1}{T_Z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{u}{v}\cos\alpha} = f_Z \cdot \frac{1}{1 - \frac{u}{v}\cos\alpha}$$

$$f_P = \frac{f_Z}{1 - \frac{u}{v}\cos\alpha} \quad ; \quad T_P = \frac{1}{f_P} \tag{37}$$

9.1.3 „Pohybující se“ pozorovatel a „nehybný“ zdroj

Nechť se pozorovatel P pohybuje rychlostí $\vec{u}$ svírající úhel α se směrem $P_{t=0} \rightarrow Z$ vzhledem ke zdroji periodického vlnění o frekvenci f_Z a rychlosti šíření vlny $\vec{v}$:



Vlnová délka λ_P a frekvence f_P, které naměří pozorovatel P, jsou dány vztahy:

$$\lambda_p = v \cdot T_P \quad ; \quad f_p = \frac{1}{T_P}$$

Vlnová délka zdroje λ_Z je dána vztahem:

$$\lambda_Z = v \cdot T_P + u \cos\alpha \cdot T_P = (v + u \cos\alpha) \cdot T_P$$

Pozorovatel se tedy posune během doby jedné periody T_P trvání signálu z polohy $P_{t=0}$ do polohy $P_{t=T_P}$. Situaci si lze tedy představit tak, jakoby se pozorovatel trvale nacházel v bodě $P'_{t=T_P}$ a rychlost šíření vlny $\vec{v}$ byla zvýšena právě o průmět rychlosti $\vec{u}$ skutečného pohybu pozorovatele P do směru pozorování $P_{t=0} \rightarrow Z$. Frekvence signálu f_Z a perioda signálu T_Z, jsou tedy:

$$f_Z = \frac{v}{\lambda_Z} = \frac{v}{(v + u\cos\alpha) \cdot T_P} = \frac{1}{T_P} \cdot \frac{1}{\frac{v + u\cos\alpha}{v}} = \frac{1}{T_P} \cdot \frac{1}{1 + \frac{u}{v}\cos\alpha} = f_P \cdot \frac{1}{1 + \frac{u}{v}\cos\alpha}$$

$$f_Z = \frac{f_P}{1 + \frac{u}{v}\cos\alpha} \quad ; \quad T_Z = \frac{1}{f_Z} \tag{38}$$

Takže frekvence signálu naměřená pozorovatelem je:

$$f_P = f_Z\left(1 + \frac{u}{v}\cos\alpha\right) \quad ; \quad T_P = \frac{1}{f_P} \tag{39}$$

9.1.4 Závěr

Z výrazů (37) a (39) plyne, že frekvence f_P, kterou naměří pozorovatel P v případě přibližujícího se zdroje Z, je jiná, než v případě přibližujícího se pozorovatele P. V obou případech je ale vyšší než frekvence zdroje f_Z. Podobné je to i v případě vzdalujícího se zdroje nebo pozorovatele. Frekvence naměřené pozorovatelem budou vždy nižší, než frekvence zdroje a také navzájem rozdílné. Pamatujme tedy, že v klasické fyzice nelze zaměnit popis *Dopplerova jevu* z hlediska pohybu zdroje a pozorovatele.

9.2 Dopplerův jev v relativistické fyzice

Při relativistickém výpočtu musíme z hlediska vzájemného pohybu uvažovat také *dilataci času*. Takže pozorovatel vnímá dilataci periody signálu podle vztahu (10):

$$T^{(0)} = \frac{T^{(1)}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \Rightarrow T^{(1)} = T^{(0)}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \tag{40}$$

9.2.1 „Nehybný“ pozorovatel a „pohybující se“ zdroj

Pozorovatel P nacházející se v „klidové“ *inerciální soustavě* $S^{(0)}$ vnímá u zdroje Z nacházejícího se v „pohybující se“ *inerciální soustavě* $S^{(1)}$ navíc *dilataci* periody signálu, což znamená, že frekvence zdroje naměřená pozorovatelem P je nižší než bez započtení relativistického efektu pohybu zdroje. Výraz (40) upravíme do tvaru:

$$T_P^{(0)} = \frac{T_P^{(1)}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

Kde $T_P^{(0)}$ je *dilatovaná* perioda signálu a $T_P^{(1)}$ je *nedilatovaná* perioda signálu. Dále platí:

$$f_P^{(0)} = \frac{1}{T_P^{(0)}} = \frac{1}{T_P^{(1)}} \cdot \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} = f_P^{(1)}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

Kde $f_P^{(0)}$ je *dilatovaná* frekvence zdroje signálu bez započtení *Dopplerova jevu* a $f_P^{(1)}$ je *nedilatovaná* frekvence signálu. Výraz (37) pro *Dopplerův jev* pak po dosazení dostane relativistický tvar:

$$f_P = \frac{f_Z}{1-\frac{u}{v}\cos\alpha} = \frac{f_P^{(0)}}{1-\frac{u}{v}\cos\alpha} = \frac{f_P^{(1)}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1-\frac{u}{v}\cos\alpha}$$

$$f_P = \frac{f_P^{(1)}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1-\frac{u}{v}\cos\alpha} \tag{41}$$

Kde f_P je relativistická Dopplerova frekvence naměřena pozorovatelem P v soustavě $S^{(0)}$, frekvence f_Z zdroje signálu je nahrazena dilatovanou frekvencí $f_P^{(0)}$ zdroje, takže $f_Z = f_P^{(0)}$.

9.2.2 „Pohybující se“ pozorovatel a „nehybný“ zdroj

Pozorovatel P nacházející se v „pohybující se“ *inerciální soustavě* $S^{(1)}$ vnímá u zdroje Z nacházejícího se v *„klidové“ inerciální soustavě* $S^{(0)}$ navíc *kontrakci* periody signálu, což znamená, že frekvence naměřená tímto pozorovatelem P je vyšší než bez započtení relativistického efektu pohybu pozorovatele. Výraz (40) upravíme do tvaru:

$$T_P^{(1)} = T_P^{(0)}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

Kde $T_P^{(1)}$ je *kontrahovaná* perioda signálu a $T_P^{(0)}$ je *nekontrahovaná* perioda signálu. Dále platí:

$$f_P^{(1)} = \frac{1}{T_P^{(1)}} = \frac{1}{T_P^{(0)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = f_P^{(0)}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

Kde $f_P^{(1)}$ je *kontrahovaná* frekvence signálu bez započtení *Dopplerova jevu* a $f_P^{(0)}$ je *nekontrahovaná* frekvence signálu. Výraz (39) pro *Dopplerův jev* pak po dosazení dostane relativistický tvar:

$$f_P = f_Z\left(1 + \frac{u}{v}\cos\alpha\right) = f_P^{(1)}\left(1 + \frac{u}{v}\cos\alpha\right) = \frac{f_P^{(0)}\left(1 + \frac{u}{v}\cos\alpha\right)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

$$f_P = \frac{f_P^{(0)}\left(1 + \frac{u}{v}\cos\alpha\right)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \tag{42}$$

Kde f_P je relativistická Dopplerova frekvence naměřena pozorovatelem P v soustavě $S^{(1)}$, frekvence f_Z zdroje signálu je nahrazena kontrahovanou frekvencí $f_P^{(1)}$ zdroje, takže $f_Z = f_P^{(1)}$.

9.2.3 Závěr

Užití výrazu pro *dilataci* nebo *kontrakci* frekvence

$$f_P^{(0)} = f_P^{(1)}\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \quad ; \quad f_P^{(1)} = f_P^{(0)}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

závisí na úvaze, zda se zdroj pohybuje vůči pozorovateli nebo pozorovatel vůči zdroji. Rozdílné výsledky jsou přímým důsledkem *dilatace času*. Tento jev se nazývá *příčný Dopplerův jev*. Je-li spojnice $P \to Z$ kolmá ke směru rychlosti, *podélný Dopplerův jev* se podle klasické fyziky neprojeví, protože se zdroj k pozorovateli ani nepřibližuje ani se od něj nevzdaluje a nedochází tedy ke zhuštění či zředění vlnoploch.

Jak vyplývá z výrazů (37) a (39) pro nerelativistický *Dopplerův zákon* přibližujícího se zdroje nebo pozorovatele, v obou případech se frekvence naměřená pozorovatelem zvýší. Naměřená hodnota bude ale v každém z těchto případů jiná.

Podobné rozdílné výsledky dostaneme také v případě relativistického *Dopplerova zákona* reprezentovaného výrazy (41) a (42) s jedinou výjimkou, kdy rychlost šíření vlny v je stejná jako rychlost světla c. V tomto případě dojde ke shodě frekvencí a nezávisí tedy na tom, zda uvažujeme o pohybu zdroje nebo pozorovatele.

Pro $v = c$ a $\cos\alpha = 1$ (uvažujeme pouze radiální rychlost) můžeme upravit výraz (41) do tvaru:

$$f_P = \frac{f_P^{(1)}\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 - \frac{u}{v}\cos\alpha} = \frac{f_P^{(1)}\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 - \frac{u}{c}} = f_P^{(1)}\sqrt{\frac{\left(1 - \frac{u}{c}\right)\left(1 + \frac{u}{c}\right)}{\left(1 - \frac{u}{c}\right)^2}} = f_P^{(1)}\sqrt{\frac{\left(1 + \frac{u}{c}\right)}{\left(1 - \frac{u}{c}\right)}}$$

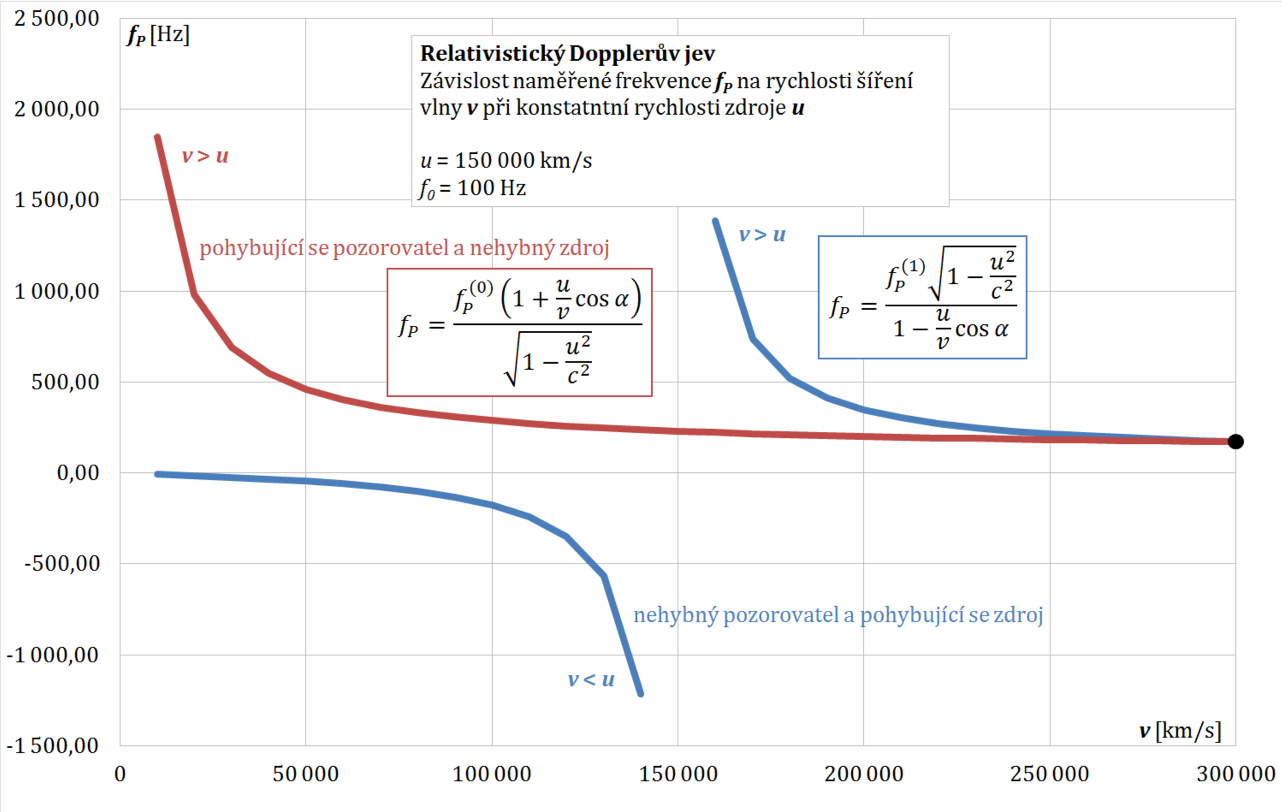
Podobně můžeme upravit také výraz (42):

$$f_P = \frac{f_P^{(0)}\left(1 + \frac{u}{v}\cos\alpha\right)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{f_P^{(0)}\left(1 + \frac{u}{c}\right)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = f_P^{(0)}\sqrt{\frac{\left(1 + \frac{u}{c}\right)^2}{\left(1 - \frac{u}{c}\right)\left(1 + \frac{u}{c}\right)}} = f_P^{(0)}\sqrt{\frac{\left(1 + \frac{u}{c}\right)}{\left(1 - \frac{u}{c}\right)}}$$

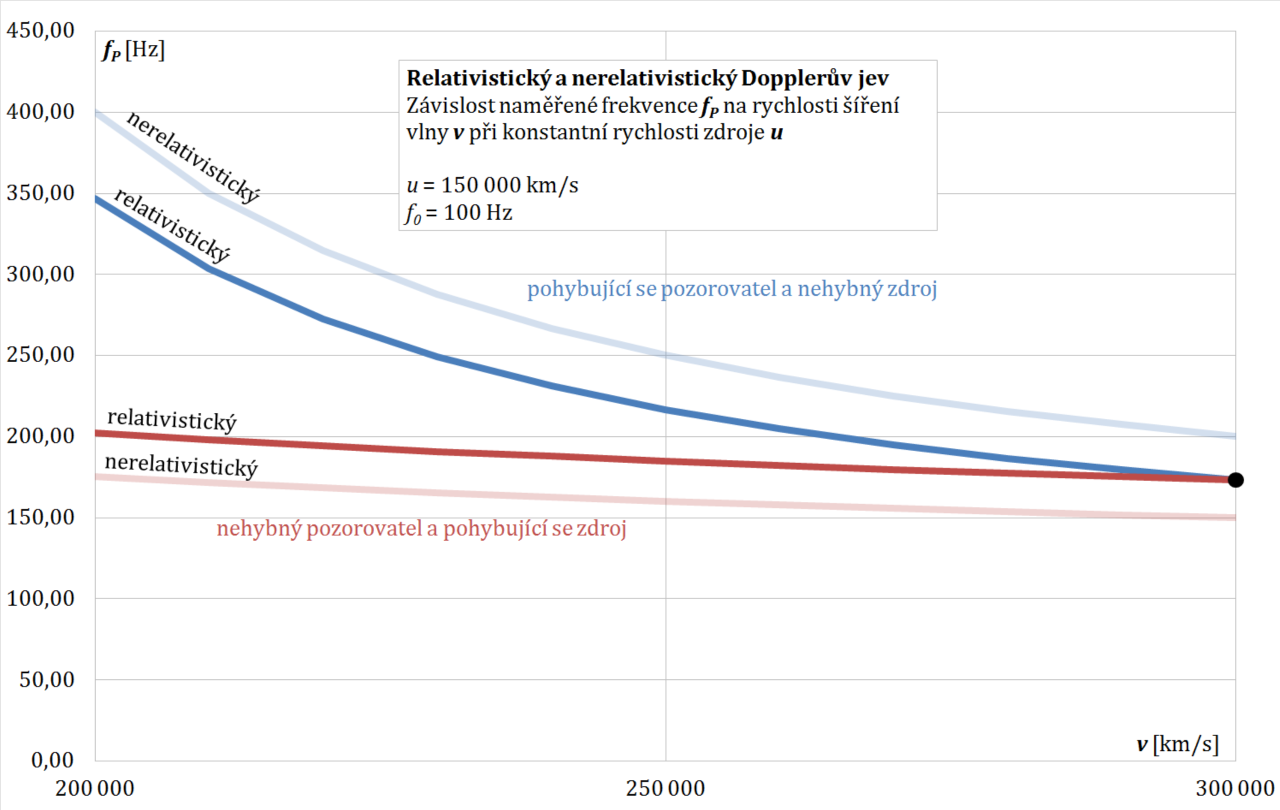
Vidíme, že oba výrazy jsou totožné, takže můžeme konstatovat, že pro rychlost vlny šířící se prostorem rychlostí světla platí relativistický *Dopplerův zákon* ve tvaru:

$$f_P = f_0 \sqrt{\frac{\left(1 + \frac{u}{c}\right)}{\left(1 - \frac{u}{c}\right)}} \tag{43}$$

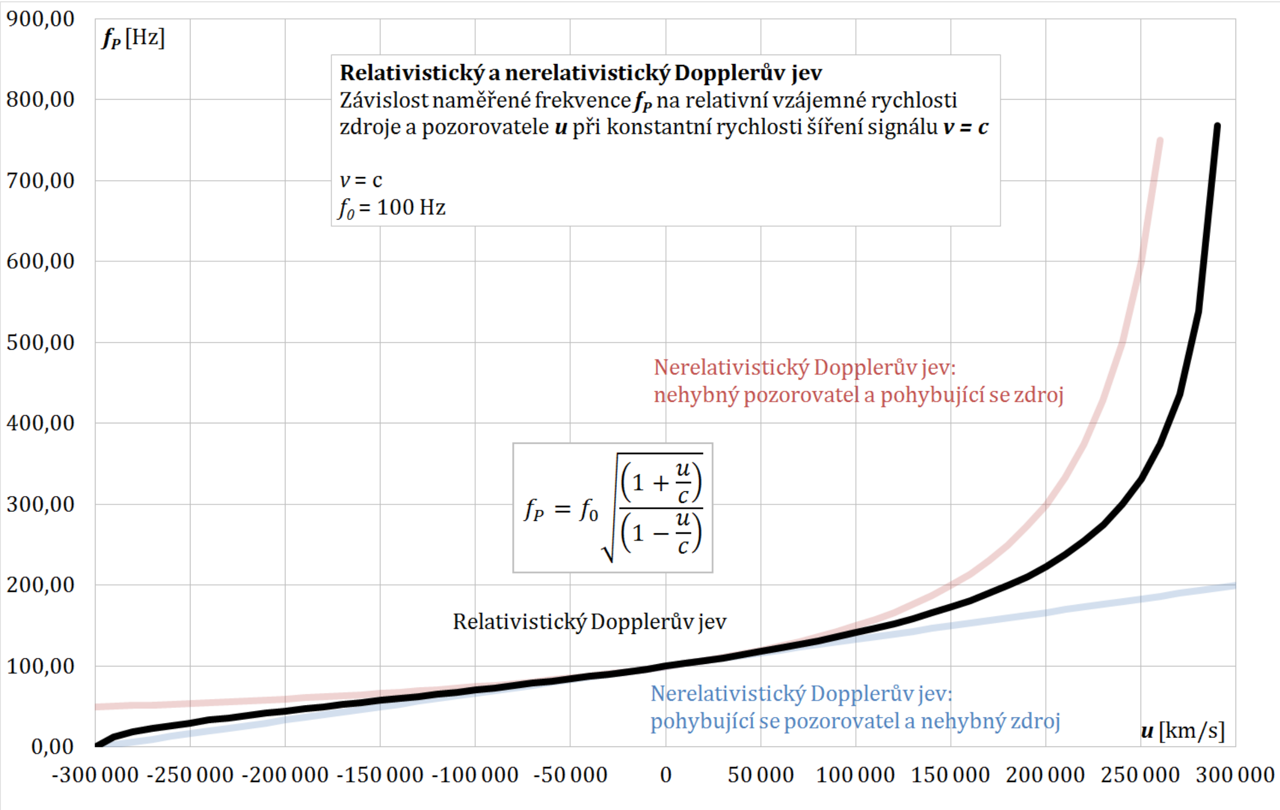
Kde f_P je relativistická Dopplerova frekvence naměřena pozorovatelem P, f_0 je klidová frekvence zdroje, u je relativní vzájemná rychlost pozorovatele a zdroje. Diagram níže zobrazuje závislost frekvence f_P na rychlosti v šíření vlny (signálu) u relativistického *Dopplerova jevu*, kterou by naměřil pozorovatel pro konkrétní případ vzájemné rychlosti pozorovatele a zdroje $u = 0{,}5\,c = 150\,000$ km/s. Je zde dobře vidět, že pouze v případě, kdy $v = c$, se jedná o jednu frekvenci:



Na následujícím diagramu je vidět rozdíl mezi relativistickým a nerelativistickým *Dopplerovým jevem*:



Nakonec ještě graf závislosti naměřené frekvence f_P na vzájemné relativní rychlosti zdroje a pozorovatele pro rychlost vlny $v = c$ a frekvenci zdroje $f_0 = 100$ Hz (relativistický *Dopplerův jev* odpovídá skutečnosti):



10. PARADOX DVOJČAT

Podíváme-li se na výraz (10) pro dilataci času z hlediska dvou pozorovatelů (dvojčat) nacházející se v různých *inerciálních soustavách*, můžeme si všimnout zdánlivého rozporu ohledně měření času:

- V čase $t^{(1)} = t^{(0)} = 0$ se dvě různé *inerciální soustavy* míjí, což je okamžik synchronizace hodin v obou soustavách.
- Pozorovatelé v obou soustavách se od sebe vzdalují konstantní relativistickou rychlostí u.
- Pozorovatel v soustavě $S^{(0)}$ naměří zpomalení chodu hodin v soustavě $S^{(1)}$ podle vztahu

$$t^{(1)} = t^{(0)} \cdot \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

- Pozorovatel v soustavě $S^{(1)}$ naměří zpomalení chodu hodin v soustavě $S^{(0)}$ podle vztahu

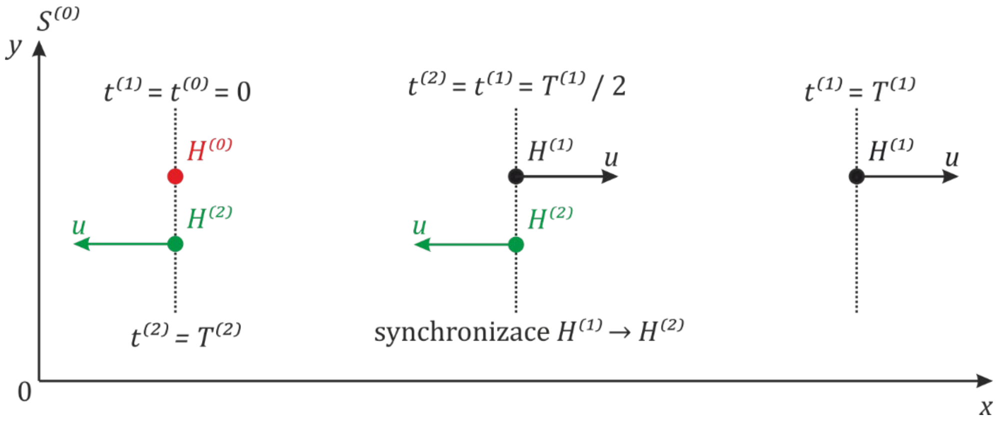
$$t^{(0)} = t^{(1)} \cdot \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

Zde vzniká zdánlivý rozpor. Z hlediska pozorovatele v soustavě $S^{(0)}$ to vypadá tak, že pozorovatel v soustavě $S^{(1)}$ stárne pomaleji, ale z hlediska pozorovatele v soustavě $S^{(1)}$ to vypadá, že to naopak pozorovatel v soustavě $S^{(0)}$ stárne pomaleji. Takže kdo z nich má vlastně pravdu? Který z výše uvedených vztahů vlastně platí?

Ke skutečnému porovnání naměřených hodnot obou hodin by mohlo dojít pouze tehdy, kdyby se oba pozorovatelé znovu setkali, což by znamenalo, že by například jeden z pozorovatelů musel zastavit a letět zpět. Nenacházel by se tedy po celou dobu v jedné *inerciální soustavě*, ale minimálně ve dvou (cesta tam a cesta zpět při zanedbání zpomalení a zrychlení). Vztah spojený se systémy hodin platí stále, ale už se nejedná o tutéž jednu původní *inerciální soustavu*. Rovnocennost *inerciálních soustav* z hlediska fyzikálních zákonů není tedy tímto porušena a k rozporu nedochází.

Abychom ukázali, že nedochází k rozporu, zachováme obě soustavy $S^{(0)}$ i $S^{(1)}$ po celou dobu *inerciální.* Soustavy se tedy od sebe po celou dobu měření neustále vzdalují rovnoměrným přímočarým pohybem. Pozorovatelé (dvojčata) se tedy nesetkají. Pomůžeme si soustavou $S^{(2)}$, která se pohybuje stejně rychle jako soustava $S^{(1)}$, ale opačným směrem a v okamžiku míjení obou soustav $S^{(1)}$ a $S^{(2)}$ převezmou hodiny $H^{(2)}$ informaci o čase z hodin $H^{(1)}$.

Nechť $S^{(0)}$ je *inerciální soustava* s hodinami $H^{(0)}$ a $S^{(1)}$ je *inerciální soustava* s hodinami $H^{(1)}$, která se vzdaluje od soustavy $S^{(0)}$ rychlostí u. Hodiny $H^{(1)}$ se po cestě střetnou s hodinami $H^{(2)}$ nacházející se v *inerciální soustavě* $S^{(2)}$ a pohybují se stejnou rychlostí u, ale opačným směrem k hodinám $H^{(0)}$ v soustavě $S^{(0)}$. Při tomto střetu se hodiny $H^{(2)}$ synchronizují s hodinami $H^{(1)}$, což znamená, že hodiny $H^{(2)}$ v tomto okamžiku ukazují stejný čas jako hodiny $H^{(1)}$, což je polovina celkové doby $T^{(1)}$ $\left(t^{(1)} = t^{(2)} = T^{(1)}/2\right)$. Tím, že je rychlost soustav $S^{(1)}$ a $S^{(2)}$ stejná vůči soustavě $S^{(0)}$, je v nich také stejná *dilatace času* vůči této soustavě $S^{(0)}$. Hodiny $H^{(2)}$ vlastně přebírají časovou štafetu, aby se na konci měření mohl porovnat čas s hodinami $H^{(0)}$ v jednom místě prostoru:



Označme tedy

- $T^{(0)}$ čas, který ukazují hodiny $H^{(0)}$ v okamžiku setkání s hodinami $H^{(2)}$ na konci měření.
- $T^{(2)}$ čas, který ukazují hodiny $H^{(2)}$ v okamžiku setkání s hodinami $H^{(0)}$ na konci měření.
- $T^{(1)}$ čas, který ukazují hodiny $H^{(1)}$ v okamžiku setkání hodin $H^{(2)}$ s hodinami $H^{(0)}$ na konci měření.

Cílem je porovnat údaj $T^{(0)}$ hodin $H^{(0)}$ a údaj $T^{(2)}$ hodin $H^{(2)}$ v jednom místě prostoru.

10.1 Hledisko pozorovatele v soustavě $S^{(0)}$

Z hlediska pozorovatele $S^{(0)}$ platí vztah pro dilataci času hodin $H^{(2)}$:

$$T^{(2)} = T^{(0)} \cdot \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \tag{44}$$

10.2 Hledisko pozorovatele v soustavě $S^{(1)}$

Po setkání hodin $H^{(1)}$ s hodinami $H^{(2)}$ bude rychlost $u^{(1,2)}$ soustavy $S^{(1)}$ vůči soustavě $S^{(2)}$ dána fyzikálním zákonem (24) o relativistickém skládání rovnoběžných rychlostí:

$$v_x^{(0)} = \frac{v_x^{(1)} + u}{1 + \frac{u}{c^2} v_x^{(1)}}$$

V tomto případě $v_x^{(0)} = u^{(1,2)}$ a $v_x^{(1)} = u$, takže můžeme psát:

$$u^{(1,2)} = \frac{u + u}{1 + \frac{u}{c^2} u} = \frac{2u}{1 + \frac{u^2}{c^2}}$$

Hodiny $H^{(2)}$ a $H^{(0)}$ se setkají v čase $t^{(1)} = T^{(1)}$ soustavy $S^{(1)}$. Platí, že celková vzdálenost $H^{(0)}H^{(1)}$, o kterou se vzdálí hodiny $H^{(1)}$ od hodin $H^{(0)}$ rychlostí u, se rovná vzdálenosti $H^{(2)}H^{(1)}$, o kterou se vzdálí hodiny H_1 od hodin H_2 rychlostí $u^{(1,2)}$ po jejich setkání a synchronizaci. Můžeme tedy psát:

$$u \cdot T^{(1)} = u^{(1,2)} \cdot \left(T^{(1)} - \frac{T^{(2)}}{2}\right)$$

$$u \cdot T^{(1)} = u^{(1,2)} \cdot T^{(1)} - \frac{u^{(1,2)} \cdot T^{(2)}}{2}$$

$$2u \cdot T^{(1)} = 2u^{(1,2)} \cdot T^{(1)} - u^{(1,2)} \cdot T^{(2)}$$

$$T^{(2)} = 2T^{(1)} \cdot \frac{u^{(1,2)} - u}{u^{(1,2)}} = 2T^{(1)}\left(1 - \frac{u}{u^{(1,2)}}\right) = 2T^{(1)}\left(1 - \frac{u}{\frac{2u}{1+\frac{u^2}{c^2}}}\right) = 2T^{(1)}\left(1 - \frac{1+\frac{u^2}{c^2}}{2}\right)$$

$$= 2T^{(1)}\left(\frac{1-\frac{u^2}{c^2}}{2}\right) = T^{(1)}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right) \Rightarrow T^{(1)} = \frac{T^{(2)}}{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

Z hlediska pozorovatele $S^{(1)}$ platí vztah pro dilataci času hodin $H^{(0)}$:

$$T^{(0)} = T^{(1)}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \tag{45}$$

Po dosazení za $T^{(1)}$ z předchozího výrazu dostáváme:

$$T^{(0)} = \frac{T^{(2)}}{1-\frac{u^2}{c^2}} \cdot \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} = T^{(2)}\sqrt{\frac{1-\frac{u^2}{c^2}}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^2}} = T^{(2)}\sqrt{\frac{1}{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{T^{(2)}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

Po vyjádření $T^{(2)}$ dostaneme opět výraz (44):

$$T^{(2)} = T^{(0)} \cdot \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

11. RELATIVISTICKÁ HMOTNOST A HYBNOST

V klasické fyzice je hybnost tělesa nebo částice určena vztahem:

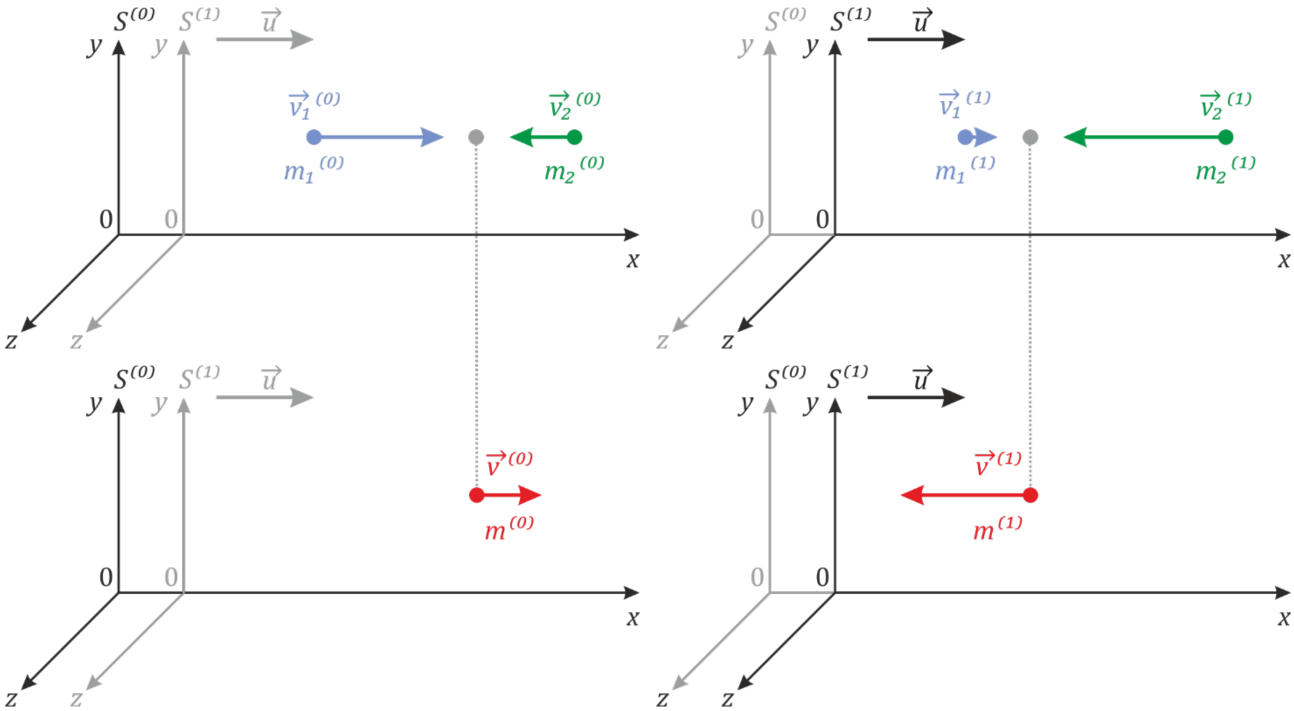
$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} \tag{46}$$

Kde $\vec{p}$ je hybnost, m je hmotnost a $\vec{v}$ je rychlost. Zákon zachování hybnosti soustavy lze zapsat jako rovnost součtu hybností před srážkou a po srážce:

$$\sum_{i=1}^{N_1} m_i \cdot \vec{v_i} = \sum_{j=1}^{N_2} m_j \cdot \vec{v_j} \tag{47}$$

Kde N_1 je počet těles (částic) soustavy před srážkou a N_2 je počet těles (částic) soustavy po srážce. Jinak řečeno, součet hybností všech těles (částic) před srážkou a po srážce je stejný. Počet těles (částic) N_1 a N_2 před a po srážce může být různý, protože při ní může dojít buď ke spojení těles (částic), nebo k jejich rozdělení na více těles (částic).

Jak již víme, *speciální teorie relativity* stojí na základním postulátu, který říká, že fyzikální zákony jsou ve všech *inerciálních soustavách* stejné. To znamená, že i *zákon zachování hybnosti* musí platit také při pohledu z jiné *inerciální soustavy*:



Nechť $S^{(1)}$ je *inerciální soustava* pohybující se vzhledem k soustavě $S^{(0)}$ rychlostí u; dále $m_1^{(0)}$, $m_2^{(0)}$ a $v_1^{(0)}$, $v_2^{(0)}$ jsou hmotnosti a rychlosti částic z pohledu *inerciální soustavy* $S^{(0)}$; $m_1^{(1)}$, $m_2^{(1)}$ a $v_1^{(1)}$, $v_2^{(1)}$ jsou hmotnosti a rychlosti stejných částic z hlediska *inerciální soustavy* $S^{(1)}$; $m^{(0)}$, $\vec{v}^{(0)}$ hmotnost a rychlost výsledné částice po srážce z hlediska soustavy $S^{(0)}$; $m^{(1)}$, $\vec{v}^{(1)}$ hmotnost a rychlost výsledné částice po srážce z hlediska soustavy $S^{(1)}$. Obecně platí:

$$m_1^{(0)}\vec{v_1}^{(0)} + m_2^{(0)}\vec{v_2}^{(0)} = m^{(0)}\vec{v}^{(0)}$$

$$m_1^{(1)}\vec{v_1}^{(1)} + m_2^{(1)}\vec{v_2}^{(1)} = m^{(1)}\vec{v}^{(1)}$$

Rychlosti částic z hlediska obou soustav jsou navzájem svázány vztahem (24) pro skládání relativistických rychlostí:

$$v_x^{(0)} = \frac{v_x^{(1)} + u}{1 + \frac{u}{c^2} v_x^{(1)}}$$

Po dosazení $v_1^{(0)}, v_1^{(1)}$ a $v_2^{(0)}, v_2^{(1)}$ dostaneme:

$$v_1^{(0)} = \frac{v_1^{(1)} + u}{1 + \frac{u}{c^2} v_1^{(1)}} \quad ; \quad v_2^{(0)} = \frac{v_2^{(1)} + u}{1 + \frac{u}{c^2} v_2^{(1)}}$$

11.1 Předpoklad hmotnosti nezávislé na rychlosti

Předpokládejme na okamžik, že hmotnost částic nezávisí na jejich rychlosti. Dále pro zjednodušení předpokládejme, že částice mají stejnou nenulovou hmotnost $m_1 = m_2 = m$ a pohybují se proti sobě v soustavě $S^{(1)}$ nenulovou rychlostí o stejné velikosti $v_2^{(1)} = -v_1^{(1)}$. Z hlediska soustavy $S^{(1)}$ tedy platí:

$$m v_1^{(1)} + m\left(-v_1^{(1)}\right) \stackrel{?}{=} 2 m v^{(1)} = 0 \Rightarrow v^{(1)} = 0$$

Pokud je z hlediska soustavy $S^{(1)}$ rychlost částic $v^{(1)}$ po srážce nulová, pak z hlediska soustavy $S^{(0)}$ je rychlost částic $v^{(0)}$ po srážce právě rovna rychlosti u soustavy $S^{(1)}$. Takže z hlediska soustavy $S^{(0)}$ platí:

$$m v_1^{(0)} + m v_2^{(0)} \stackrel{?}{=} 2mu$$

Po dosazení $v_1^{(1)}$ a $v_2^{(1)}$ dostaneme pro hybnost:

$$m \cdot \frac{v_1^{(1)} + u}{1 + \frac{u}{c^2} v_1^{(1)}} + m \cdot \frac{-v_1^{(1)} + u}{1 - \frac{u}{c^2} v_1^{(1)}} \stackrel{?}{=} 2mu$$

Výraz na levé straně rovnice upravíme:

$$m \cdot \frac{\left(1 - \frac{u}{c^2} v_1^{(1)}\right)\left(v_1^{(1)} + u\right) + \left(1 + \frac{u}{c^2} v_1^{(1)}\right)\left(-v_1^{(1)} + u\right)}{\left(1 + \frac{u}{c^2} v_1^{(1)}\right)\left(1 - \frac{u}{c^2} v_1^{(1)}\right)}$$

$$= m \cdot \frac{\left(v_1^{(1)} - \frac{u}{c^2} {v_1^{(1)}}^2 + u - \frac{u^2}{c^2} v_1^{(1)}\right) + \left(-v_1^{(1)} - \frac{u}{c^2} {v_1^{(1)}}^2 + u + \frac{u^2}{c^2} v_1^{(1)}\right)}{\left(1 + \frac{u}{c^2} v_1^{(1)}\right)\left(1 - \frac{u}{c^2} v_1^{(1)}\right)}$$

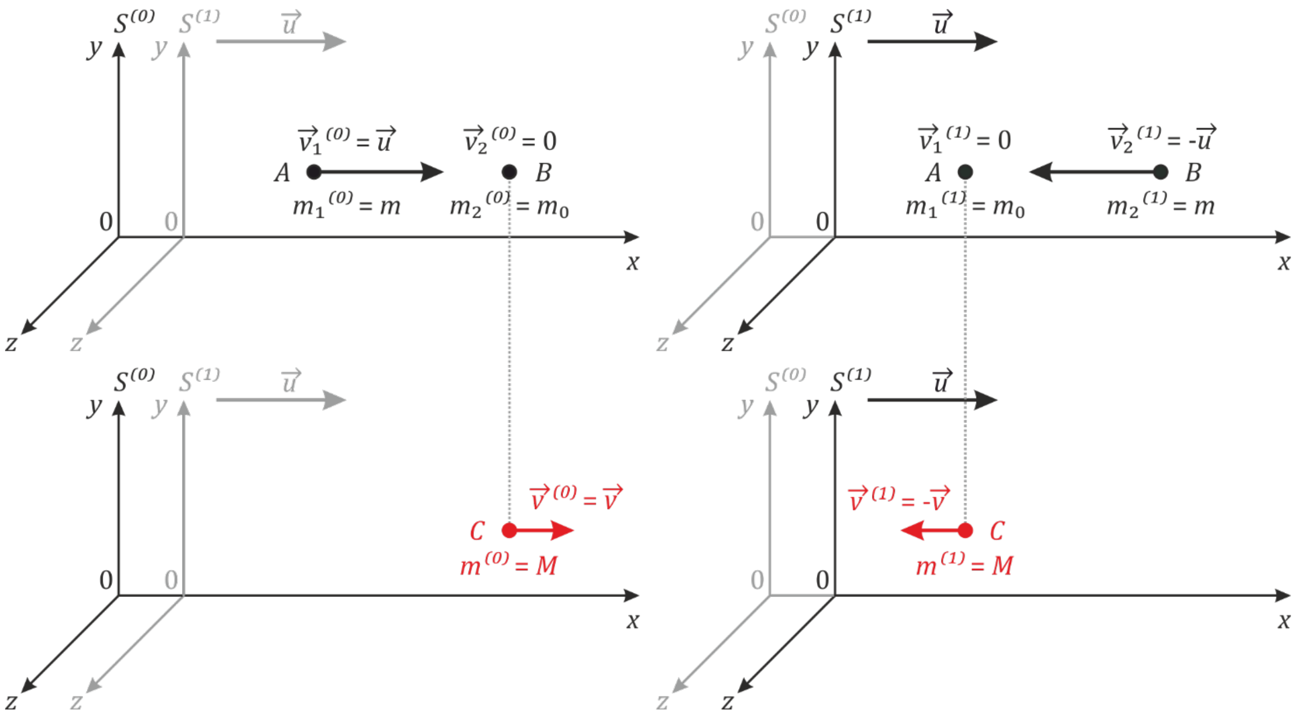
$$= m \cdot \frac{-2 \frac{u}{c^2} {v_1^{(1)}}^2 + 2u}{\left(1 + \frac{u}{c^2} v_1^{(1)}\right)\left(1 - \frac{u}{c^2} v_1^{(1)}\right)} = \frac{2mu\left(1 - \frac{{v_1^{(1)}}^2}{c^2}\right)}{\left(1 + \frac{u}{c^2} v_1^{(1)}\right)\left(1 - \frac{u}{c^2} v_1^{(1)}\right)} \stackrel{?}{=} 2mu$$

Výraz musí být platný i pro případ, kdy rychlost $v_1^{(1)} = u$, pro $u > 0$, čímž se nám celý výraz ještě zjednoduší:

$$mv_1^{(0)} + mv_2^{(0)} = 2mu \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{u^2}{c^2}\right)} \neq 2mu$$

Předpoklad hmotnosti nezávislé na rychlosti tedy nebyl správný. Pokud chceme zachovat výraz (46) pro hybnost částice (tělesa) za použití *Lorentzovy transformace* pro skládání rychlostí (24), musíme předpokládat, že hmotnost také závisí na rychlosti.

11.2 Relativistická hmotnost a hybnost



Pro zjednodušení předpokládejme, jak ukazuje obrázek, že rychlost $v_1^{(0)}$ částice A v soustavě $S^{(0)}$ je rovna rychlosti u soustavy $S^{(1)}$ vzhledem k soustavě $S^{(0)}$, rychlost $v_2^{(0)}$ částice B v soustavě $S^{(0)}$ je nulová; rychlost $v_1^{(1)}$ částice A v soustavě $S^{(1)}$ je nulová, rychlost $v_2^{(1)}$ částice B v soustavě $S^{(1)}$ je rovna rychlosti $-u$ soustavy $S^{(1)}$ vzhledem k soustavě $S^{(0)}$. Obě částice mají stejnou klidovou hmotnost m_0 a vzhledem ke stejně velkým rychlostem v rámci příslušných soustav také stejnou pohybovou hmotnost $\left(m_1^{(0)} = m_2^{(1)} = m\right)$; velikost rychlosti výsledné částice po srážce je v obou soustavách stejně velká $\left(v^{(0)} = -v^{(1)} = v\right)$ a pohybová hmotnost výsledné částice je také stejná $\left(m^{(0)} = m^{(1)} = M\right)$. Potom můžeme psát zákon zachování hybnosti

$$m_1^{(0)} v_1^{(0)} + m_2^{(0)} v_2^{(0)} = m^{(0)} v^{(0)}$$

$$m_1^{(1)} v_1^{(1)} + m_2^{(1)} v_2^{(1)} = m^{(1)} v^{(1)}$$

ve tvaru

$$S^{(0)}: mu = Mv$$

$$S^{(1)}: m(-u) = M(-v) \Rightarrow mu = Mv$$

Hodnota výrazu levé strany rovnice pro zachování hybnosti v *inerciální soustavě* $S^{(0)}$ se rovná hodnotě výrazu pravé strany rovnice pro zachování hybnosti v *inerciální soustavě* $S^{(1)}$ po přepočtu pomocí vztahu pro relativistické skládání rychlostí (24). Dále platí, že celková *relativistická hmotnost* soustavy zůstává zachována:

$$M = m + m_0$$

Z čehož plyne, že klidová hmotnost výsledného tělesa (částice) po srážce a spojení je větší než součet klidových hmotností těles (částic) před srážkou. Klidová hmotnost tedy nesplňuje zákon zachování hmotnosti. Z výrazu pro zachování hybnosti si vyjádříme rychlost:

$$mu = Mv$$

$$mu = (m + m_0)v \Rightarrow v = \frac{mu}{m + m_0}$$

Uplatníme vztah (24) pro relativistické skládání rychlostí:

$$v_x^{(0)} = \frac{v_x^{(1)} + u}{1 + \frac{u}{c^2} v_x^{(1)}}$$

$$v = \frac{-v + u}{1 - \frac{u}{c^2} v}$$

$$v\left(1 - \frac{u}{c^2} v\right) = u - v$$

Za rychlost v dosadíme z předchozího výrazu pro zachování hybnosti a upravíme:

$$\frac{mu}{m + m_0}\left(1 - \frac{u \cdot \frac{mu}{m + m_0}}{c^2}\right) = u - \frac{mu}{m + m_0}$$

$$\frac{mu}{m + m_0}\left[1 - \frac{mu^2}{c^2(m + m_0)}\right] = u - \frac{mu}{m + m_0}$$

$$\frac{mu}{m + m_0} - \frac{mu}{m + m_0} \cdot \frac{mu^2}{c^2(m + m_0)} = \frac{mu + m_0 u - mu}{m + m_0}$$

$$mu - \frac{m^2 u^3}{c^2(m + m_0)} = m_0 u$$

$$mu - \frac{m^2 u^3}{c^2 m + c^2 m_0} = m_0 u$$

$$c^2 m^2 u + c^2 m_0 m u - m^2 u^3 = m_0 u(c^2 m + c^2 m_0)$$

$$c^2 m^2 u + c^2 m_0 m u - m^2 u^3 = c^2 m_0 m u + c^2 {m_0}^2 u$$

$$c^2 m^2 u - m^2 u^3 = c^2 {m_0}^2 u$$

$$c^2 m^2 - m^2 u^2 = c^2 {m_0}^2$$

$$m^2(c^2 - u^2) = c^2 {m_0}^2$$

$$\frac{{m_0}^2}{m^2} = \frac{c^2 - u^2}{c^2}$$

$$\frac{m_0}{m} = \sqrt{\frac{c^2 - u^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

Nakonec dostáváme hledaný obecný výraz pro relativistickou hmotnost a hybnost:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad ; \quad p = \frac{m_0 \cdot v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{48}$$

Kde m_0 je takzvaná klidová hmotnost částice (tělesa), která je pro danou částici (těleso) ve všech *inerciálních soustavách* stejná a v je rychlost částice (tělesa). Je zřejmé, že s rostoucí rychlostí tělesa se zvyšuje *relativistická hmotnost*. Při rychlosti světla by byla hmotnost nekonečná a to je také důvod, proč žádný hmotný objekt (s nenulovou klidovou hmotností) nemůže této rychlosti dosáhnout.

12. RELATIVISTICKÁ ENERGIE

12.1 Klasická mechanika

V klasické mechanice platí:

$$dW = F \cdot ds \quad ; \quad F = m_0 \cdot a \quad ; \quad ds = v \cdot dt \quad ; \quad v = a \cdot t \quad ; \quad p = m_0 \cdot v$$

$$ds = v \cdot dt = a \cdot t \cdot dt \quad \Rightarrow \quad s = \int a \cdot t \cdot dt = \frac{1}{2}at^2$$

$$E_k = W = F \cdot s = m_0 \cdot a \cdot s = m_0 \cdot a \cdot \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}m_0 a^2 t^2 = \frac{1}{2}m_0 v^2$$

Kde W je práce (energie), F je síla působící na těleso, s je dráha, m_0 hmotnost tělesa nezávislá na jeho rychlosti, v je rychlost tělesa na kterou bylo těleso urychleno za dobu t zrychlením a, p je hybnost. V klasické mechanice neexistuje přímá souvislost mezi *energií* tělesa a *setrvačnou hmotností* tělesa. To znamená, že těleso může mít různou *kinetickou energii*, ale *setrvačná hmotnost* tělesa zůstává stejná.

12.2 Relativistická energie (první způsob odvození)

Ve *speciální teorii relativity* každá změna energie souvisí se změnou hmotnosti tělesa. Působí-li na těleso o klidové hmotnosti m_0 síla F, která uvede těleso z klidu do pohybu, pak se *kinetická energie* tělesa zvětší o ΔE_k, ale současně se také zvětší hmotnost tělesa o hodnotu $\Delta m = m - m_0$. Díky relativistické definici hmotnosti a hybnosti můžeme převzít pohybové rovnice klasické mechaniky:

$$dE_k = \vec{F} \cdot ds \quad ; \quad \vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad ; \quad ds = \vec{v} \cdot dt \quad ; \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad ; \quad \vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

$$dE_k = \vec{F} \cdot ds = \vec{F} \cdot \vec{v} \cdot dt$$

$$\frac{dE_k}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = m \cdot \vec{a} \cdot \vec{v} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = m_0 \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right)\vec{v}$$

Uvažujeme-li sílu působící rovnoběžně s dráhou tělesa, můžeme vynechat vektorový zápis a psát:

$$\frac{dE_k}{dt} = m_0 \frac{d}{dt}\left(\frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right)v$$

Při úpravě využijeme definice diferenciálu:

$$df(v) = f'(v) \cdot dv \quad ; \quad f(v) = \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{f_1(v)}{f_2(v)}$$

Provedeme derivaci $f(v)$, kde použijeme vzorec pro derivaci podílu dvou funkcí a vzorec pro derivaci složené funkce:

$$f'(v) = \left[\frac{f_1(v)}{f_2(v)}\right]' = \frac{f_1'(v) \cdot f_2(v) - f_1(v) \cdot f_2'(v)}{f_2^2(v)}$$

$$f_2'(v) = \{f_2[f_3(v)]\}' = f_2'[f_3(v)] \cdot f_3'(v)$$

Takže můžeme psát:

$$df(v) = f'(v) \cdot dv = \left[\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right]' \cdot dv = \frac{1 \cdot \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} - v \cdot \frac{1}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{-2v}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}} \cdot dv$$

$$= \frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} + v \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{v}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}} \cdot dv = \frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{v^2}{c^2}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot dv = \frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot dv$$

Dosadíme do rovnice pro energii:

$$\frac{dE_k}{dt} = m_0 \frac{d}{dt}\left(\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) v = m_0 v \frac{dv}{dt} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{m_0 v}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{dv}{dt}$$

$$dE_k = \frac{m_0 v}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot dv$$

$$E_k = \int \frac{m_0 v}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot dv = m_0 \int \frac{v}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot dv \quad ; \quad \left[\begin{array}{l} a^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2} \Rightarrow v = \sqrt{c^2 - a^2c^2} \\ 2a\,da = \frac{-2v}{c^2} dv \Rightarrow dv = -\frac{ac^2}{\sqrt{c^2-a^2c^2}} da \end{array}\right]$$

$$E_k = m_0 \int -\frac{\sqrt{c^2-a^2c^2}}{a^3} \cdot \frac{ac^2}{\sqrt{c^2-a^2c^2}} \cdot da = m_0 \int -\frac{c^2}{a^2} da = m_0 c^2 \int -a^{-2} da = m_0 c^2 a^{-1} + B$$

$$= \frac{m_0 c^2}{a} + B = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + B$$

Pro určení konstanty B vyjdeme ze vztahu pro celkovou energii a z předpokladu univerzálnosti zákona:

$$E = E_k + E_0 \quad \Rightarrow \quad E_k = E - E_0 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + B = mc^2 - m_0 c^2$$

Kde $E = mc^2$ a $E_0 = m_0 c^2$

12.3 Relativistická energie (druhý způsob odvození)

Opět vyjdeme z pohybových rovnic klasické mechaniky:

$$dE_k = \vec{F} \cdot ds \quad ; \quad \vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad ; \quad ds = \vec{v} \cdot dt \quad ; \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad ; \quad \vec{p} = m \cdot \vec{v} \quad ; \quad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$dE_k = \vec{F} \cdot ds = m \cdot \vec{a} \cdot ds = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot ds = \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot ds = \vec{v} \cdot d\vec{p} = \vec{v} \cdot d(m \cdot \vec{v})$$

Uvažujeme-li sílu působící rovnoběžně s dráhou tělesa, můžeme vynechat vektorový zápis a psát:

$$dE_k = F \cdot ds = m \cdot a \cdot ds = m \cdot \frac{dv}{dt} \cdot ds = \frac{dp}{dt} \cdot ds = v \cdot dp = v \cdot d(m \cdot v)$$

$$E_k = \int_0^p v \cdot dp = \int_0^p v \cdot d(m \cdot v) = \int_0^p v \cdot (dm \cdot v + m \cdot dv) = \int_0^p (v \cdot dm \cdot v + v \cdot m \cdot dv)$$

$$= \int_0^p (v^2 \cdot dm + m \cdot v \cdot dv)$$

Upravíme vztah (48) pro *relativistickou hmotnost*:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$m^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = {m_0}^2$$

$$m^2(c^2 - v^2) = {m_0}^2 c^2$$

Diferenciál rovnice je:

$$d[m^2(c^2 - v^2)] = d({m_0}^2 c^2)$$

$$2m \cdot dm \cdot (c^2 - v^2) + m^2 \cdot (-2v) \cdot dv = 0$$

$$(c^2 - v^2) \cdot dm = m \cdot v \cdot dv$$

Dosadíme do předchozího vztahu pro energii a dostáváme:

$$E_k = \int_0^p (v^2 \cdot dm + m \cdot v \cdot dv) = \int_{m_0}^m (v^2 \cdot dm + (c^2 - v^2) \cdot dm) = \int_{m_0}^m (v^2 dm + c^2 dm - v^2 dm)$$

$$= \int_{m_0}^m c^2 dm = c^2 \int_{m_0}^m dm = c^2 [m]_{m_0}^m = c^2(m - m_0) = mc^2 - m_0 c^2 = E - E_0$$

12.4 Celková energie

Celková energie E je tedy dána vztahem:

$$E = E_k + E_0 = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{49}$$

Kde E_k je *kinetická energie* tělesa a E_0 je *klidová energie* tělesa, což zahrnuje energii chemickou, jadernou, potenciální. Tento vztah vyjadřuje *zákon ekvivalence hmotnosti a energie*. Pamatujme, že *klidová hmotnost* částice, která vznikla srážkou dvou částic, je větší než součet *klidových hmotností* jednotlivých částic, protože *kinetická energie* částic před srážkou se přeměnila na vnitřní energii výsledné částice, což se projevilo přírůstkem hmotnosti.

Zákon zachování energie můžeme psát ve tvaru:

$$\sum_{i=1}^{N_1} E_i = \sum_{j=1}^{N_2} E_j \qquad (50)$$

13. ČTYŘROZMĚRNÁ FORMULACE STR

13.1 Prostoročas

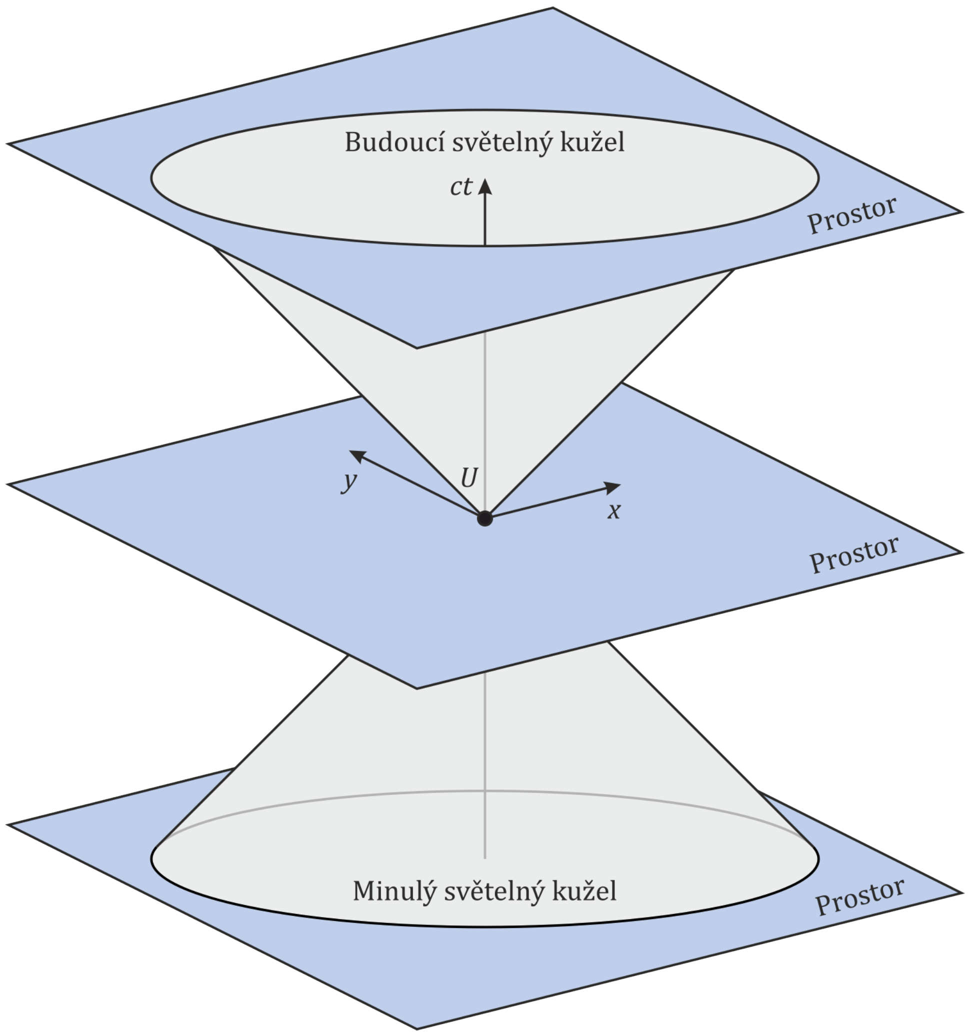
Prostoročas definujeme jako čtyřrozměrné kontinuum (tři prostorové souřadnice a jedna časová), které zahrnuje všechny body třírozměrného prostoru ve všech časových okamžicích. K matematickému popisu prostoročasu se v *STR* používá *Minkowského prostor* podle matematika Hermanna Minkowského (1864 – 1909).

V klasické (newtonovské) fyzice je *prostoročas* absolutní (je ekvivalentní pojmu prostoru a času), což znamená, že je to množina všech bodů prostoru odpovídající událostem nastávajícím současně v daném časovém okamžiku pro všechny pozorovatele. Nastane-li nějaká událost U v čase $t = 0$, pak všechny události s časem $t > 0$ leží v budoucnosti a všechny události s časem $t < 0$ leží v minulosti z hlediska libovolného pozorovatele.

V relativistické fyzice neexistuje absolutní současnost dvou událostí. Jak již bylo ukázáno v předchozím textu, události, které jsou současné pro jednoho pozorovatele, nemusí být současné pro jiného pozorovatele. *Prostoročas* tedy není absolutní a je tvořen pro různé pozorovatele různými množinami bodů. Pro popis „jeviště všech událostí“ se lépe hodí pojem *prostoročasu*, který není vázán na konkrétního pozorovatele.

13.2 Světočára a světelný kužel

Pohyb bodu v prostoru je reprezentován křivkou v *prostoročase*, kterou nazýváme *světočára bodu*. *Světočára* je množina všech bodů v prostoročasovém diagramu nazývaných *události* zobrazující historii umístění událostí v prostoru v libovolném časovém okamžiku. Tento pojem byl do *STR* rovněž zaveden matematikem Hermannem Minkowskim.



Světelný kužel s vrcholem v jednom bodě prostoru a čase je grafický model pro názorný popis *prostoročasu*. Představme si nějakou událost, která nastane v bodě *U prostoročasu*, například vyslání světelného impulzu v jistém okamžiku do všech směrů v prostoru. *Světelný kužel* pak můžeme definovat jako oblast, kterou světlo vycházející z události lokalizované na jednom místě prostoru a čase a šířící se do všech prostorových směrů, vytváří při jeho cestě *časoprostorem*. Jinými slovy, světelný kužel je třírozměrný „povrch" popisující časový vývoj záblesku světla v *Minkowského prostoru*.

Pro snadnou představu si zobrazujeme *světelný kužel* pouze se dvěma prostorovými souřadnicemi a jednou časovou. Světlo se pak po události v bodě *U* šíří v čase jako rozpínající se kruh, který vytváří v časoprostoru kuželovou plochu. Ve skutečnosti ovšem existují tři prostorové dimenze, takže se světlo šíří jako expandující sféra ve třírozměrném prostoru a vytváří tak čtyřdimenzionální verzi kuželu.

Světelný kužel orientovaný na budoucnost se označuje jako *budoucí světelný kužel*. Světelný kužel orientovaný na minulost se nazývá *minulý světelný kužel*.

Pro čtyřdimenzionální *budoucí světelný kužel* v *inerciální soustavě S* pozorovatele *P* platí vztah:

$$ct = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Kde c je rychlost světla ve vakuu, t je čas, za který doletí světelný paprsek z bodu události U do bodu prostoru o souřadnicích x, y, z.

Pro čtyřdimenzionální *minulý světelný kužel* v *inerciální soustavě S* pozorovatele *P* platí vztah:

$$-ct = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Z hlediska pozorovatele nacházejícím se v libovolné jiné *inerciální soustavě*, který prochází v čase události bodem U je situace stejná právě proto, že rychlost světla je v každé *inerciální soustavě* stejná.

13.3 Konstrukce světelného kužele

Nechť je záblesk světla událost, která nastala v čase t_0 v bodě U. Všechny body prostoru, které mohou být dosaženy tímto impulsem, tvoří *budoucí světelný kužel*. Všechny body prostoru, které mohou vyslat světelný impuls tak, aby dorazil v čase t_0 do bodu U, tvoří *minulý světelný kužel*. Vzhledem k události U tedy můžeme v prostoročase definovat následující oblasti:

- Oblast událostí na *budoucím světelném kuželu,* které může ovlivnit událost U.
- Oblast událostí na *minulém světelném kuželu*, které můžou ovlivnit událost U.
- Oblast událostí uvnitř *budoucího světelného kuželu*, které mohou být ovlivněné částicemi s nenulovou klidovou hmotností emitované v bodě U, kdy rychlost pohybu těchto částic je $v < c$.
- Oblast událostí uvnitř *minulého světelného kuželu*, které mohou ovlivnit částicemi s nenulovou klidovou hmotností událost v bodě U, kdy rychlost pohybu těchto částic je $v < c$.
- Oblast událostí mimo světelný kužel, které nemohou být ovlivněny událostí U, a také nemohou ovlivnit událost U.

Jak již víme, v *teorii relativity* neexistuje žádný způsob, jak událostem jednoznačně přiřadit hodnotu času t. Různí pozorovatelé obecně přiřadí jedné stejné události různé časy. Demonstrujme toto na příkladu dvou pozorovatelů $P^{(0)}$ a $P^{(1)}$ nacházející se v *inerciálních soustavách* $S^{(0)}$ a $S^{(1)}$, jejichž soustavy souřadnic spolu vzájemně souvisí *Lorentzovou transformací* (17) a (20) a jejichž *světočáry* procházejí prostoročasovým bodem U. Pro zjednodušení se omezíme pouze na prostorovou souřadnici $x^{(0)}$ v soustavě $S^{(0)}$ a $x^{(1)}$ v soustavě $S^{(1)}$. Souřadnicové osy $ct^{(1)}$ a $x^{(1)}$ soustavy $S^{(1)}$ jsou dány rovnicemi:

$$ct^{(1)}: \quad x^{(1)} = 0$$

$$x^{(1)}: \quad ct^{(1)} = 0 \Rightarrow t^{(1)} = 0$$

Takže z hlediska pozorovatele $P^{(0)}$ v soustavě $S^{(0)}$ za pomocí vztahů *Lorentzovy transformace* (17) a (20) pro transformaci souřadnic platí:

(a) pro souřadnici $ct^{(1)}$:

$$x^{(1)} = \frac{x^{(0)} - u \cdot t^{(0)}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

$$0 = \frac{x^{(0)} - u \cdot t^{(0)}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

$$0 = x^{(0)} - u \cdot t^{(0)}$$

$$u \cdot t^{(0)} = x^{(0)}$$

$$t^{(0)} = \frac{x^{(0)}}{u}$$

$$ct^{(0)} = \frac{c}{u} x^{(0)} \tag{51}$$

(b) pro souřadnici $x^{(1)}$:

$$t^{(1)} = \frac{t^{(0)} - \frac{u}{c^2} \cdot x^{(0)}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

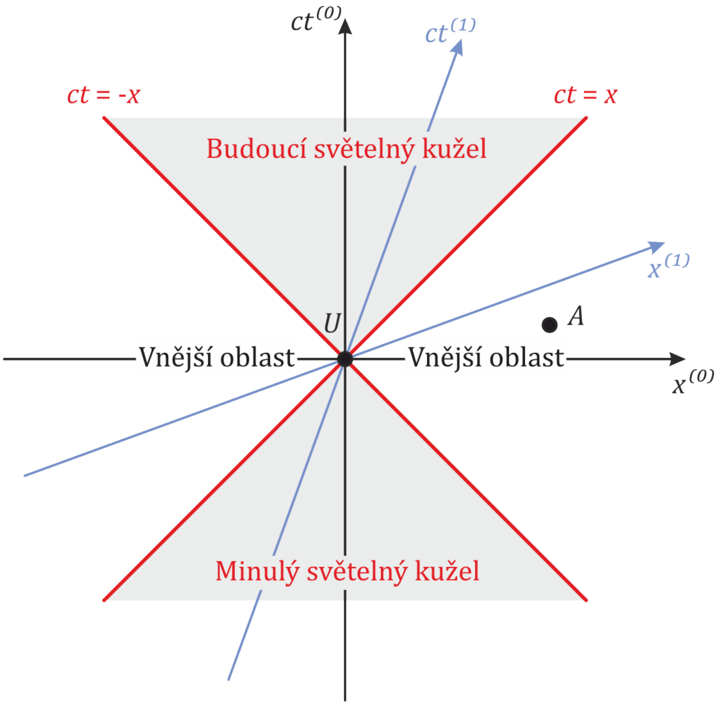
$$0 = \frac{t^{(0)} - \frac{u}{c^2} \cdot x^{(0)}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

$$0 = t^{(0)} - \frac{u}{c^2} \cdot x^{(0)}$$

$$t^{(0)} = \frac{u}{c^2} \cdot x^{(0)}$$

$$ct^{(0)} = \frac{u}{c} \cdot x^{(0)} \qquad (52)$$

Vidíme, že rovnice (51) a (52) jsou rovnice přímek. Všimněme si, že v souřadnicích soustavy $S^{(0)}$ je směrnice přímky (osy) $x^{(1)}$ převrácenou hodnotou směrnice přímky (osy) $ct^{(1)}$.



Na obrázku vidíme, že událost reprezentovaná bodem A leží v soustavě $S^{(0)}$ vzhledem k události U v budoucnosti, to znamená nad osou $x^{(0)}$, ale v soustavě $S^{(1)}$ vzhledem k události U v minulosti, to znamená pod osu $x^{(1)}$, což značí, že z hlediska pozorovatele $P^{(0)}$ nastane událost A až po události U, kdežto z hlediska pozorovatele $P^{(1)}$ nastala událost A před událostí U, přestože událost U nastala pro oba pozorovatele současně. Takže vidíme, že pojmy jako minulost a budoucnost jsou relativní. V prostoročasovém diagramu vidíme 3 základní oblasti událostí vzhledem k události U pro které platí:

(1) Budoucí světelný kužel

$$c^2t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) > 0 \quad ; \quad t > 0, t \in \mathbb{R}$$

Události, které se nachází v oblasti *budoucího světelného kužele*, nastanou pro libovolného pozorovatele vždy později než událost U. Proto se tato oblast nazývá *absolutní budoucnost události* U.

(2) Minulý světelný kužel

$$c^2t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) > 0 \quad ; \quad t < 0, t \in \mathbb{R}$$

Události, které se nachází v oblasti *minulého světelného kužele*, nastanou pro libovolného pozorovatele vždy dříve než událost U. Proto se tato oblast nazývá *absolutní minulost události* U.

(3) Vnější oblast

$$c^2t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) < 0 \quad ; \quad t \in \mathbb{R}$$

Protože v STR má smysl uvažovat pouze o rychlosti $|u| < c$, směrnice souřadnicové osy $x^{(1)}$ daná výrazem $|u|/c$ bude vždy menší než jedna a proto osa $x^{(1)}$ leží ve *vnější oblasti* prostoročasového diagramu. Vhodnou volbou rychlosti u *inerciální soustavy* $S^{(1)}$ vůči *inerciální soustavě* $S^{(0)}$ lze docílit toho, aby osa $x^{(1)}$ protínala kteroukoli událost ve vnější oblasti, což znamená, že by například události U a A mohly nastat současně. Proto se tato vnější oblast nazývá *kvazisoučasnost události* U nebo také oblast *absolutně odlehlá*.

13.4 Princip maximální rychlosti šíření interakcí

Princip maximální rychlosti šíření interakcí $v \leq c$ vylučuje existenci absolutně tuhého tělesa známého z klasické mechaniky, u kterého vzdálenost libovolných dvou bodů zůstává během akcelerace nebo rovnoměrného přímočarého pohybu konstantní.

Máme-li například tyč určité délky a sílu, která uvedla do pohybu jeden konec tyče, pak podle klasické mechaniky se současně uvedl do pohybu i druhý konec tyče, což předpokládá nekonečnou rychlost šíření interakcí uvnitř objektu, a tím vlastně existenci absolutní současnosti, což je v rozporu s teorií relativity. Podle TR je třeba předpokládat, že síla působící na těleso toto těleso deformuje a rychlost šíření těchto deformací se šíří rychlostí $v \leq c$.

Teorie relativity nevylučuje „nadsvětelné" rychlosti geometrického charakteru jako je například laserový paprsek dopadající na vzdálené stínítko, na kterém se zobrazuje bod tohoto paprsku. Otáčíme-li laserem určitou rychlostí, pak se nám světelný bod na stínítku zdánlivé pohybuje. Zdánlivá rychlost pohybu světelného bodu závisí na rychlosti otáčení laseru a vzdálenosti laseru od stínítka a může samozřejmě překročit rychlost světla. Zde ale nedochází k rozporu s teorií, protože polohy jednotlivých bodů na stínítku v různých časových okamžicích nejsou mezi sebou vzájemně kauzálně svázané.

13.5 Interval

Uvažujme pozorovatele $P^{(1)}$ nacházející se v *inerciální soustavě* $S^{(1)}$, která se pohybuje oproti *inerciální soustavě* $S^{(0)}$ konstantní rychlostí $u^{(1,0)}$. Pozorovatel $P^{(1)}$ zapne v prostoročasovém bodě pozorovatele $P^{(0)}$ daném souřadnicemi $\left[t_1^{(0)}, x_1^{(0)}, y_1^{(0)}, z_1^{(0)}\right]$ soustavy $S^{(0)}$ stopky a v bodě $\left[t_2^{(0)}, x_2^{(0)}, y_2^{(0)}, z_2^{(0)}\right]$ je zastaví. Úkolem je vyjádřit čas $\Delta t^{(1)}$ soustavy $S^{(1)}$ pomocí souřadnic $\left[t_1^{(0)}, x_1^{(0)}, y_1^{(0)}, z_1^{(0)}\right]$ a $\left[t_2^{(0)}, x_2^{(0)}, y_2^{(0)}, z_2^{(0)}\right]$. V obou soustavách $S^{(0)}$ a $S^{(1)}$ platí:

$$\Delta t^{(0)} = t_2^{(0)} - t_1^{(0)} \quad ; \quad \Delta t^{(1)} = t_2^{(1)} - t_1^{(1)}$$

Vzdálenost, kterou urazil pozorovatel $P^{(1)}$ v soustavě $S^{(0)}$ v daném časovém intervalu $\Delta t^{(0)}$, označme $l^{(0)}$. Rychlost $u^{(1,0)}$ pak můžeme vyjádřit vztahem:

$$u^{(1,0)} = \frac{l^{(0)}}{\Delta t^{(0)}}$$

Použijeme vzorec (10) pro dilataci času, upravíme a dosadíme za $u^{(1,0)}$:

$$\Delta t^{(1)} = \Delta t^{(0)} \cdot \sqrt{1 - \frac{{u^{(1,0)}}^2}{c^2}} = \Delta t^{(0)} \cdot \frac{1}{c}\sqrt{c^2 - {u^{(1,0)}}^2} = \frac{1}{c}\sqrt{c^2 \cdot {\Delta t^{(0)}}^2 - \left(\frac{l^{(0)}}{\Delta t^{(0)}}\right)^2 \cdot {\Delta t^{(0)}}^2}$$

$$= \frac{1}{c}\sqrt{c^2 {\Delta t^{(0)}}^2 - {l^{(0)}}^2}$$

Poznamenejme, že vztah pro *dilataci času* platí pro libovolný směr pohybu pozorovatele. Dále platí:

$$l^{(0)} = \sqrt{{\Delta x^{(0)}}^2 + {\Delta y^{(0)}}^2 + {\Delta z^{(0)}}^2} \qquad (53)$$

Dosadíme a dostáváme:

$$\Delta t^{(1)} = \frac{1}{c}\sqrt{c^2 {\Delta t^{(0)}}^2 - \left({\Delta x^{(0)}}^2 + {\Delta y^{(0)}}^2 + {\Delta z^{(0)}}^2\right)} \quad ; \quad \begin{aligned} \Delta x^{(0)} &= x_2^{(0)} - x_1^{(0)} \\ \Delta y^{(0)} &= y_2^{(0)} - y_1^{(0)} \\ \Delta z^{(0)} &= z_2^{(0)} - z_1^{(0)} \end{aligned} \qquad (54)$$

Současně uvažujme pozorovatele $P^{(2)}$ nacházející se v *inerciální soustavě* $S^{(2)}$, která se pohybuje oproti *inerciální soustavě* $S^{(0)}$ konstantní rychlostí $u^{(2,0)} \neq u^{(1,0)}$. Pozorovatel $P^{(2)}$ sleduje spuštění a zastavení stopek pozorovatele $P^{(1)}$. Přitom samozřejmě naměří jiné časy a hodnoty ostatních souřadnic $\left[t_1^{(2)}, x_1^{(2)}, y_1^{(2)}, z_1^{(2)}\right]$ a $\left[t_2^{(2)}, x_2^{(2)}, y_2^{(2)}, z_2^{(2)}\right]$. Stejným způsobem tedy můžeme po záměně příslušných souřadnic vyjádřit výraz (54) pro $\Delta t^{(1)}$:

$$\Delta t^{(1)} = \frac{1}{c}\sqrt{c^2 {\Delta t^{(2)}}^2 - \left({\Delta x^{(2)}}^2 + {\Delta y^{(2)}}^2 + {\Delta z^{(2)}}^2\right)} \quad ; \quad \begin{aligned} \Delta x^{(2)} &= x_2^{(2)} - x_1^{(2)} \\ \Delta y^{(2)} &= y_2^{(2)} - y_1^{(2)} \\ \Delta z^{(2)} &= z_2^{(2)} - z_1^{(2)} \end{aligned}$$

Z výše uvedeného plyne, že se oba výrazy musí rovnat, protože odpovídají času na stopkách $\Delta t^{(1)}$:

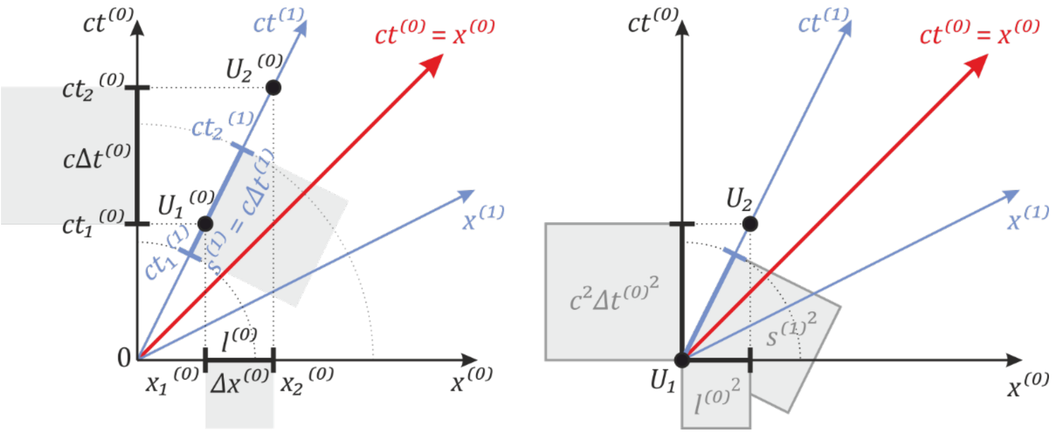
$$\Delta t^{(1)} = \frac{1}{c}\sqrt{c^2 {\Delta t^{(0)}}^2 - \left({\Delta x^{(0)}}^2 + {\Delta y^{(0)}}^2 + {\Delta z^{(0)}}^2\right)} = \frac{1}{c}\sqrt{c^2 {\Delta t^{(2)}}^2 - \left({\Delta x^{(2)}}^2 + {\Delta y^{(2)}}^2 + {\Delta z^{(2)}}^2\right)}$$

$$c^2 {\Delta t^{(1)}}^2 = c^2 {\Delta t^{(0)}}^2 - \left({\Delta x^{(0)}}^2 + {\Delta y^{(0)}}^2 + {\Delta z^{(0)}}^2\right) = c^2 {\Delta t^{(2)}}^2 - \left({\Delta x^{(2)}}^2 + {\Delta y^{(2)}}^2 + {\Delta z^{(2)}}^2\right) \qquad (55)$$

Jak je vidět, nezáleží na tom, jakou rychlostí a jakým směrem se oba pozorovatelé $P^{(0)}$ a $P^{(2)}$ vzájemně pohybují. Také nezáleží na vzájemné prostorové orientaci os kartézských soustav. Vlastnost (55) platí obecně pro libovolnou dvojici prostoročasových bodů. Představuje invarianci intervalu vzhledem k transformaci souřadnic *inerciální soustavy*. *Časoprostorový interval* mezi dvěma událostmi vyplývající z výrazu (54)

$$s^{(1)} = c\Delta t^{(1)} = \sqrt{c^2\Delta t^{(0)^2} - \left(\Delta x^{(0)^2} + \Delta y^{(0)^2} + \Delta z^{(0)^2}\right)} = \sqrt{c^2\Delta t^{(0)^2} - l^{(0)^2}} \tag{56}$$

je prostoročasovou analogií euklidovského intervalu (53), který je invariantní vůči rotaci kartézského souřadnicového systému vzhledem k počátku. *Lorentzovu transformaci* lze tedy považovat za prostoročasovou obdobu otočení kartézského systému souřadnic. Na obrázku je znázorněn výraz (56) reprezentovaný pouze jednou prostorovou souřadnicí $x^{(0)}$:



Všimněme si, že zatímco prostorová vzdálenost $l^{(0)}$ mezi dvěma body a tedy i její kvadrát $l^{(0)^2}$ je vždy kladné číslo, jak plyne z výrazu (53), kvadrát časoprostorové vzdálenosti (intervalu mezi událostmi) $s^{(1)^2}$ může v závislosti na volbě událostí nabývat kladných, nulových i záporných hodnot - jak plyne z výrazu (56). Geometrie prostoročasu tedy není geometrií euklidovskou. Říkáme jí *Minkowského pseudoeuklidovská geometrie*.

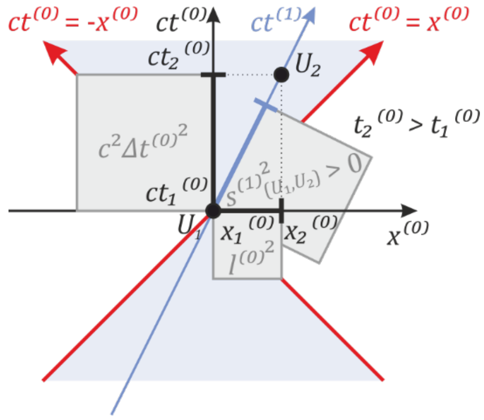
Dále si vyjádříme kvadrát časoprostorové vzdálenosti $s^2(U_1, U_2)$ událostí U_1 a U_2 danou výrazem (56) pro obecnou *inerciální soustavu* souřadnic:

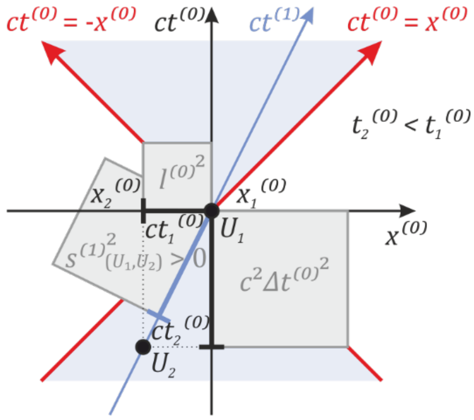
$$\begin{aligned} s^2(U_1,U_2) &= c^2(t_2-t_1)^2 - [(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2] \\ s^2(U_1,U_2) &= c^2\Delta t^2 - (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2) \\ s^2(U_1,U_2) &= c^2\Delta t^2 - l^2 \end{aligned} \tag{57}$$

Kde $[t_1, x_1, y_1, z_1]$ jsou časoprostorové souřadnice události U_1 a $[t_2, x_2, y_2, z_2]$ jsou časoprostorové souřadnice události U_2 v libovolné *inerciální soustavě*. Mohou nastat následující případy:

(1) Událost U_2 leží v absolutní budoucnosti $(t_2 > t_1)$ nebo v absolutní minulosti $(t_2 < t_1)$ události U_1

$$s^2(U_1,U_2) = c^2\Delta t^2 - l^2 \quad , \quad s^2(U_1,U_2) > 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} c^2\Delta t^2 - l^2 &> 0 \\ c^2\Delta t^2 &> l^2 \end{aligned}$$





Víme z předchozího, že fyzikální význam $s^{(1)^2}(U_1, U_2)$ je:

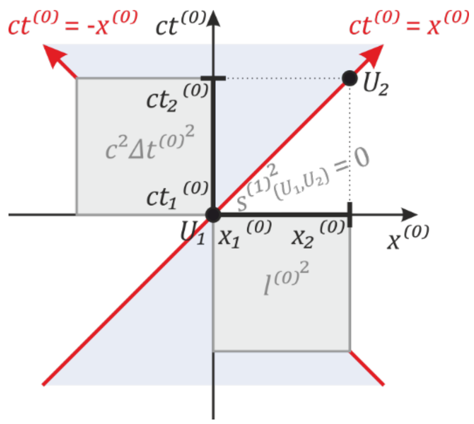
$$s^{(1)^2}(U_1, U_2) = c^2 \Delta t^{(1)^2}$$

$$s^{(1)}(U_1, U_2) = c\Delta t^{(1)}$$

Kde $\Delta t^{(1)}$ je čas pozorovatele $P^{(1)}$ v *inerciální soustavě* $S^{(1)}$ naměřený mezi událostmi U_1, U_2, které lze spojit *světočárou* tohoto pozorovatele pohybující se podsvětelnou rychlostí. Jeho časová osa prochází oběma událostmi. Tyto události proto nastávají pro tohoto pozorovatele *soumístně*. Vektor spojující tyto body se nazývá *časupodobný vektor*.

(2) Událost U_2 leží na světelném kuželi události U_1

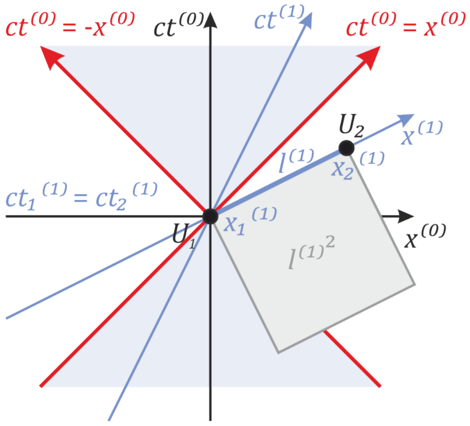
$$s^2(U_1, U_2) = c^2 \Delta t^2 - l^2 \quad , \quad s^2(U_1, U_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} c^2 \Delta t^2 - l^2 &= 0 \\ c^2 \Delta t^2 &= l^2 \end{aligned}$$



Události U_1 a U_2 jsou spojeny *světočárou* světelného signálu. Vektor spojující tyto body se nazývá *světelný vektor*.

(3) Událost U_2 leží v *kvazisoučasnosti* události U_1

$$s^2(U_1, U_2) = c^2 \Delta t^2 - l^2 \quad , \quad s^2(U_1, U_2) < 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} c^2 \Delta t^2 - l^2 &< 0 \\ c^2 \Delta t^2 &< l^2 \end{aligned}$$



Pro tento případ existuje pozorovatel $P^{(1)}$ pro kterého nastávají události U_1 a U_2 současně. Proto položíme $t_1^{(1)} = t_2^{(1)} \Rightarrow \Delta t^{(1)} = 0$, dosadíme do upravené rovnice (57) a dostáváme:

$$s^{(0)^2}(U_1, U_2) = c^2 \Delta t^{(1)^2} - l^{(1)^2}$$

$$s^{(0)^2}(U_1, U_2) = -l^{(1)^2}$$

Kde $l^{(1)}$ je prostorová vzdálenost událostí U_1 a U_2 z hlediska pozorovatele $P^{(1)}$. Vektor spojující tyto body se nazývá *prostorupodobný vektor*.

Tak, jako můžeme počítat v euklidovském prostoru obecně délku křivky zadanou parametrickými funkcemi $x = f_x(p), y = f_y(p), z = f_z(p)$, pomocí výrazu

$$l = \int_{p_1}^{p_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dp}\right)^2}\, dp\,,$$

kde $p \in \langle p_1, p_2 \rangle$ je parametr, tak podobně můžeme obecně počítat délku *světočáry* v *Minkowského prostoru* zadanou parametrickými funkcemi $t = f_t(p), x = f_x(p), y = f_y(p), z = f_z(p)$:

$$s = \int_{p_1}^{p_2} \sqrt{\left| c^2 \left(\frac{dt}{dp}\right)^2 - \left[\left(\frac{dx}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dp}\right)^2\right]\right|}\, dp$$

Důsledkem invariance intervalu $s(U_1, U_2)$ je, že délka *světočáry* nezávisí na *inerciální soustavě* souřadnic, kterou použijeme pro její parametrické vyjádření a ani na volbě parametru p. Místo parametru p tedy zvolme parametr $t^{(0)}$ časové osy v *inerciální soustavě* souřadnic $S^{(0)}$. Pak pro délku *světočáry* $s^{(1)}$ dostaneme:

$$s^{(1)}(U_1, U_2) = \int_{t_1^{(0)}}^{t_2^{(0)}} \sqrt{\left| c^2 \left(\frac{dt^{(0)}}{dt^{(0)}}\right)^2 - \left[\left(\frac{dx^{(0)}}{dt^{(0)}}\right)^2 + \left(\frac{dy^{(0)}}{dt^{(0)}}\right)^2 + \left(\frac{dz^{(0)}}{dt^{(0)}}\right)^2\right]\right|}\, dt$$

$$s^{(1)}(U_1, U_2) = \int_{t_1^{(0)}}^{t_2^{(0)}} c \sqrt{\left|1 - \frac{u^2}{c^2}\right|}\, dt \quad ; \quad u^2 = \left(\frac{dx^{(0)}}{dt^{(0)}}\right)^2 + \left(\frac{dy^{(0)}}{dt^{(0)}}\right)^2 + \left(\frac{dz^{(0)}}{dt^{(0)}}\right)^2$$

Kde u je okamžitá rychlost pohybujícího se bodu popisující *světočáru* s. Je-li $u < c$, pak výraz pod odmocninou je kladný a nemusí se psát v absolutní hodnotě:

$$s^{(1)}(U_1, U_2) = \int_{t_1^{(0)}}^{t_2^{(0)}} c\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}dt = c\left(t_2^{(0)} - t_1^{(0)}\right)\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = c\Delta t^{(0)}\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = c\Delta t^{(1)}$$

Délka *světočáry* $s^{(1)}(U_1, U_2)$ má pak fyzikální význam c-násobku změny hodin $\Delta t^{(1)}$ pohybující se po světočáře.