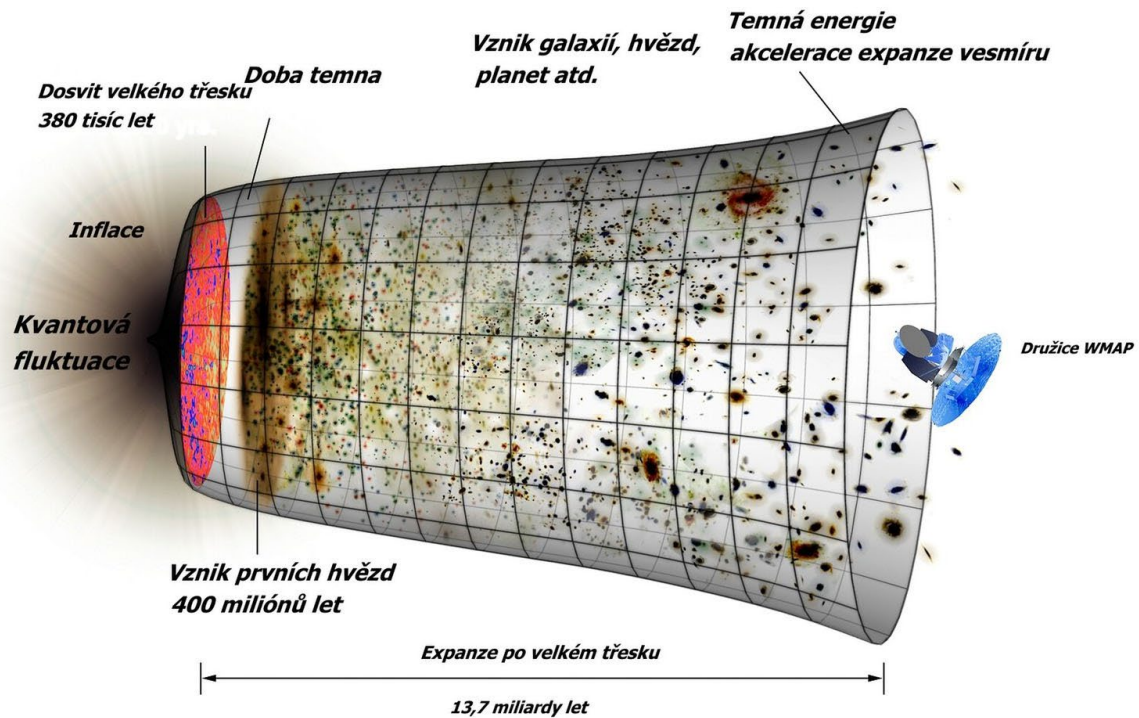


KOSMOLOGIE



Kosmologie, nauka o vesmíru jako celku, o jeho řádu a kráse, je dnes nejbouřlivěji se rozvíjející obor fyziky. Jak víme, v minulosti se člověk vždy mýlil. Ať už to bylo v době, kdy jsme si mysleli, že Země je placatá (dnes existují ještě jedinci, kteří tomu věří); když jsme si mysleli, že Země je středem vesmíru a hvězdy kolem ní obíhají; když jsme si mysleli, že Slunce je středem vesmíru; když jsme si mysleli, že naše galaxie *Mléčná dráha* je jediná v celém vesmíru; když jsme si mysleli, že svět je vytvořen pouze z atomární látky; když jsme si mysleli, že vesmír je stacionární a byl tady vždy a podobně. Takže kdykoli jsme měli nějaký názor na to, jak funguje svět, vždy jsme se mýlili. Je tedy třeba brát věci s rezervou a rozlišovat mezi názory, vírou a fakty. Současná hranice ověřitelnosti je daná látkou ve vesmíru v čase 10^{-13} sekundy. Teplotu a hustotu částic, která tady tenkrát byla, dnes dokážeme simulovat na *LHC (Large Hadron Collider)*. To znamená, že po čas 10^{-13} sekundy je to ověřitelné našimi současnými experimenty. Pro kratší časy nemáme v tuto chvíli žádné prostředky, jak ověřit naše představy případně hypotézy. Je to tedy pouze snění o tom, jak svět mohl vypadat, ale vypadat tak vůbec nemusel. Názory na to, jak vesmír funguje, se tedy mohou dynamicky měnit a měnily se v historii vždy.

K dispozici máme jedinou metodu, která vede ke sdílené a ověřitelné pravdě, a tou je *vědecká metoda*.

OBSAH

1. SCHOPNOST PREDIKCE POHYBU TĚLES VE VESMÍRU	6
1.1 Newtonův pohybový zákon	6
1.2 Problémy Newtonova pohybového zákona	6
1.2.1 Výraz není polní	6
1.2.2 Problém síly	6
1.2.3 Problém inerciální soustavy	8
1.2.4 Problém vlastního měření	8
1.2.4.1 Definice sekundy	8
1.2.4.2 Definice metru	8
1.2.4.3 Definice kilogramu	9
1.2.4.4 Definice ampéru	10
1.2.4.5 Definice kelvinu	11
1.2.4.6 Planckovy škály	11
1.2.4.7 Jiná soustava jednotek	11
1.2.4.8 Měření vzdáleností v astronomii	12
2. PRINCIP EKVIVALENCE	13
2.1 Gravitační a setrvačná hmotnost	13
2.2 Princip ekvivalence	14
2.3 Silný princip ekvivalence	16
2.4 Velmi silný princip ekvivalence	16
3. POPIS POKŘIVENÉHO SVĚTA	17
3.1 Metrika v polárních souřadnicích	17
3.1.1 Pythagorova věta v polárních souřadnicích (odvození 1)	18
3.1.2 Pythagorova věta v polárních souřadnicích (odvození 2)	19
3.2 Metrika ve sférických souřadnicích	20
3.3 Využití metrických koeficientů	21
3.3.1 Příklad: Obvod kružnice	21
3.3.2 Příklad: Plocha kružnice	22
3.3.3 Příklad: Objem koule	22
3.4 Metrika na povrchu koule	23
3.5 Gaussova křivost	25
3.5.1 Příklad: Povrch koule	26
3.5.2 Příklad: Sedlová plocha (sedlo koně)	26
3.5.3 Příklad: Rovná plocha (rovný papír)	26

3.5.4	Příklad: Válcová plocha (stočený papír).....	27
3.6	Minkovského metrika	27
3.7	Schwarzschildova metrika	28
3.7.1	Laplaceovy úvahy (Pierre-Simon Laplace).....	28
3.7.2	Metrika v okolí sféricky symetrického tělesa	29
3.8	Obecné informace a pozorování (část 1).....	31
3.9	Diagramy vnoření (embedding diagrams).....	32
3.9.1	Příklad: Rovnice plochy Schwarzschildovy metriky (diagram vnoření).....	32
3.10	Radiální pohyb světla.....	34
3.10.1	Příklad: Pohyb paprsku z bodu r_0 směrem k horizontu.....	35
3.10.2	Příklad: Pohyb paprsku z bodu r_0 směrem od horizontu.....	36
3.10.3	Příklad: Pohyb paprsku z horizontu směrem od horizontu	37
3.11	Obecné informace a pozorování (část 2).....	37
3.12	Obecný pohyb.....	38
3.12.1	Příklad: Foton (parametrizace vlastní délkou).....	39
3.12.2	Příklad: Hmotná částice (parametrizace vlastním časem)	43
3.13	Obecné informace a pozorování (část 3).....	46
4.	EXPANDUJÍCÍ VESMÍR.....	47
4.1	Fridmanova metrika	47
4.1.1	Příklad: Změna vlnové délky světla při průchodu vesmírem	49
4.1.2	Inflace, kontrakce, expanze, kritická hustota	51
4.1.3	Průběh expanzní funkce pro různé entity.....	54
4.1.4	Omega parametry.....	58
4.1.5	Klíčový kosmologický parametr w	59
4.2	Obecné informace a pozorování (část 4).....	61
4.3	Planckův vyzařovací zákon.....	64
4.3.1	Příklad: Vyzařování Slunce.....	68
4.3.2	Příklad: Vyzařování člověka	68
4.3.3	Příklad: Mikrovlnné záření pozadí (z konce Velkého třesku)	68
4.3.4	Příklad: Za jaké teploty má záření hustotu vody.....	68
4.3.5	Příklad: Poměr látky a záření ve vesmíru v závislosti na teplotě.....	70
5.	OD MIKROSEKUNDY PO KONEC VELKÉHO TŘESKU.....	72
5.1	Vznik neutronů a protonů (hadronů) z kvarků a gluonů (kvark-gluonového plazmatu).....	72
5.1.1	Elementární částice	72
5.1.1.1	Leptony (elektrony a neutrina).....	72
5.1.1.2	Kvarky	75
5.1.1.3	Polní výměnné částice	76

5.1.1.4	Higgsova částice.....	76
5.2	Oddělení neutrin od látky.....	76
5.3	Vznik lehkých jader (primární nukleosyntéza).....	78
5.4	Oddělení záření od látky	79
6.	ÉRA DIVOKÉHO PLAZMATU	81
6.1	Maxwellovy rovnice.....	81
6.2	Plazmatická fáze vesmíru.....	83
6.1	Nabitá částice v magnetickém poli	85
6.1.1	Lorentzova síla.....	85
6.1.2	Soustava nabitých částic.....	87
6.1.2.1	Příklad: Elektrický dipólový moment.....	87
6.1.2.2	Příklad: Magnetický dipólový moment	88
6.1.3	Polarizace a magnetizace	88
6.1.4	Magnetický dipólový moment částice pohybující se podél indukční čáry	88
7.	SLOŽENÍ VESMÍRU	92
7.1	Atomární látka (5 %).....	92
7.2	Temná hmota (27 %)	92
7.2.1	WIMPy.....	95
7.2.2	Axiony	97
7.2.3	Chameleony	97
7.3	Temná energie (68 %).....	97
8.	ŽIVOTOPIS VESMÍRU	100
8.1	Problémy standardního kosmologického modelu	100
8.1.1	Problém počáteční singularity.....	100
8.1.2	Problém plochosti	100
8.1.3	Problém horizontu.....	100
8.1.4	Problém komunikace.....	101
8.2	Modely vesmíru	101
8.2.1	Model hlavního proudu.....	102
8.2.2	Ekpyrotický model.....	102
8.2.3	Další vize	103
8.3	Současné představy fyziky a klíčové momenty	104
8.3.1	Čas $t = 10^{-43}$ s, $T = 10^{32}$ K, $E = 10^{19}$ GeV, $\rho = 10^{94}$ g/cm ³	104
8.3.2	Čas $t = 10^{-39}$ s, $T = 10^{29}$ K, $E = 10^{16}$ GeV, $\rho = 10^{84}$ g/cm ³	104
8.3.3	Čas $t = 10^{-35}$ s, $T = 10^{27}$ K, $E = 10^{14}$ GeV	104
8.3.4	Čas $t = 10^{-30}$ s, $T = 10^{25}$ K, $E = 10^{12}$ GeV	105
8.3.5	Čas $t = 10^{-10}$ s, $T = 10^{15}$ K, $E = 10^2$ GeV.....	105

8.3.6	Čas $t = 10^{-5}$ s, $T = 10^{13}$ K, $E = 1$ GeV.....	106
8.3.7	Čas $t = 1$ s, $T = 10^{10}$ K, $E = 1$ MeV.....	106
8.3.8	Čas $t = 3$ s, $T = 6 \cdot 10^9$ K, $E = 500$ keV.....	106
8.3.9	Čas $t = 4$ min, $T = 10^9$ K, $E = 90$ keV.....	106
8.3.10	Čas $t = 380\,000$ let, $T = 5\,000$ K, $E = 0,4$ eV.....	106
8.3.11	Čas $t = 550\,000\,000$ let, $T < 200$ K, $E < 20$ meV.....	107
8.3.12	Čas $t = 7\,000\,000\,000$ let.....	107
8.3.13	Čas $t = 14\,000\,000\,000$ let.....	108
8.3.14	Osud vesmíru.....	109
9.	DODATKY.....	111
9.1	Gravitace jako statistický projev mikrosvěta.....	111
9.1.1	Beckensteinova teplota.....	111
9.1.2	Teplota, entropie a obecná relativita.....	111
9.1.3	Verlindeho gravitace.....	112
9.1.3.1	Princip entropické síly: Gravitace je entropickou silou.....	112
9.1.3.2	Holografický princip: Zdrojem entropie jsou holografické projekční plochy.....	114
9.1.3.3	Princip fluktuací vakua: Zdrojem entropie jsou také mikroskopické fluktuace.....	116
9.1.3.4	Objemové a plošné zdroje entropie.....	117
9.1.3.5	Provázanost fluktuací.....	118

1. SCHOPNOST PREDIKCE POHYBU TĚLES VE VESMÍRU

1.1 Newtonův pohybový zákon

Nejznámějším zákonem je Newtonův pohybový zákon

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad (1)$$

který, když napíšeme ve tvaru

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

je srozumitelnější. Čím větší *síla*, tím větší *zrychlení*; čím větší *hmotnost*, tím menší *zrychlení*. Pro predikci dráhy těles jej většinou užíváme ve tvaru:

$$m \cdot \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$$

Lze jim předpovědět dráhy těles v čase dopředu i zpět (predikce, retrodikce). Tato předpověď ovšem má svá omezení. Nelze předpovídat více než miliardu let v čase dopředu nebo dozadu. Dále výraz neplatí pro tělesa s proměnnou hmotností. V tomto případě musí být hmotnost schovaná uvnitř derivací:

$$\frac{d}{dt} \left(m(t) \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \vec{F}$$

Na to, abychom z tohoto vztahu něco předpověděli, musíme při dnešní přesnosti měření velmi dobře rozumět tomu, co to je *čas*, *poloha*, *hmotnost* a *síla*. Bez tohoto porozumění je tento vzorec pouze prostou dekorací.

1.2 Problémy Newtonova pohybového zákona

1.2.1 Výraz není polní

Máme-li dva náboje, můžeme napsat výraz:

$$m \cdot \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{q \cdot Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

Změní-li jeden z nábojů polohu, pak podle tohoto vztahu se okamžitě změní silové působení na druhý náboj, což znamená, že druhý náboj zareaguje na tuto změnu okamžitě. Ve skutečnosti to ale není pravda. Toto je zásadní problém newtonovského pojetí fyziky. Jinými slovy, pojetí není polní, což znamená, že se informace v tomto vztahu šíří prostorem nekonečnou rychlostí, což neodpovídá skutečnosti.

1.2.2 Problém síly

$$\vec{F} = m \cdot \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

Za sílu mohu dosadit například Coulombův zákon

$$\vec{F} = \frac{q \cdot Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

nebo

$$\vec{F} = k \cdot y$$

$$\vec{F} = \alpha \cdot \dot{y}$$

:

Tyto matematické předpisy nám umožňují řešit diferenciální rovnici a predikovat trajektorie těles, ale bohužel nám neříkají nic o tom, co je to *síla* fyzikálně. Pokud tedy budeme *sílu* definovat vztahem $F = m \cdot a$, pak musíme vědět, co je to hmotnost m . Musíme tuto hmotnost nějak měřit, to znamená mít stabilní etalon. Dále musíme vědět, co to je zrychlení a :

$$a = \frac{dv}{dt}$$

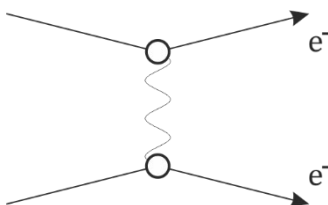
Pak musíme vědět, co to je rychlost v a co to je čas t :

$$v = \frac{dl}{dt}$$

Dále musíme vědět, co to je dráha l . Etalon pro měření dráhy je rovněž nestabilní. Neexistuje dokonale tuhá tyč, protože v dokonale tuhé tyči se šíří informace nekonečnou rychlostí, což odporuje relativitě. Nikde v přírodě nelze vytvořit souřadnicový systém, který by byl ideální pro provádění měření.

Dalším problémem je, že měření nesmí být ovlivněno žádnou vnější *silou*. To znamená, že musí být prováděno v *inerciální soustavě*. *Inerciální systém* je takový systém, kde platí *zákon setrvačnosti*, což znamená, že těleso setrvává v rovnoměrném přímočarém pohybu, pokud na něj nepůsobí *síla*. Skončili jsme tedy opět u *síly*, kterou jsme chtěli definovat. Čili jedná se o definici kruhem. Dodnes nemáme žádnou skutečnou definici *síly* a chápeme ji proto pouze jako matematický předpis na pravé straně diferenciálních rovnic. Fyzikálně tedy nedokážeme *sílu* definovat. Fyzika se s tímto problémem vypořádala po svém.

Na počátku 20. století se zrodila kvantová mechanika, v roce 1915 *obecná teorie relativity*. Obecná relativita pojem *síly* nepoužívá. Místo toho používá zakřivený prostor a čas a tvrdí, že Slunce zakřivilo prostor a čas kolem sebe a naše Země obíhá po elipse kolem Slunce, protože je to nejrovnější možná dráha v tomto zakřiveném světě. Ve 30. letech vznikla první kvantová teorie elektromagnetického pole. Je to teorie, která je analogií Maxwellových rovnic ve světě kvantovém. Tato teorie rovněž *sílu* nepoužívá. Místo *síly* používá *výměnné polní částice*.



Například letí dva *elektrony* a vymění si kvantum elektromagnetického záření. Tím, že si ho vymění, působí na ně v klasickém pojetí síla, která změní jejich trajektorie.

Takže celkem máme 4 interakce (elektromagnetickou, silnou, slabou a gravitační) a 3 z těchto interakcí (elektromagnetická, silná, slabá) jsou popsány kvantově přes *polní částice* a jedna (gravitační) je popsána obecnou relativitou přes pokrivený svět Alberta Einsteina. Takto to samozřejmě nemůže zůstat navždy.

1.2.3 Problém inerciální soustavy

Všude ve vesmíru jsou tělesa ovlivňující měření. Takže nejenom, že nevíme, co je *síla*, ale nejsme schopni nalézt (vytvořit) ani *inerciální soustavu*. Existuje pouze možnost mít takzvanou *lokální inerciální soustavu (LIS)*, která představuje prostorové a časové omezení. Například relativně malý výtah, který padá volným pádem po omezenou dobu. V ideálním případě je výtah nekonečně malý a experiment provádíme po nekonečně krátkou dobu.

1.2.4 Problém vlastního měření

1.2.4.1 Definice sekundy

Při měření se objevují časové derivace, což znamená, že musíme umět měřit čas. Dříve se to měřilo mechanickými hodinkami, které byly velmi nepřesné. Později přišly atomové hodiny. Dnes se připravují atomové hodiny, jejíž frekvence je odvozena od samotného atomového jádra nikoli jenom od obalu atomu. Jejich přesnost je taková, že se rozejdou o 1 sekundu za dobu existence vesmíru. Stále ale potřebujeme mít stanovenou časovou jednotku, ve které se provádí měření. Tou jednotkou je historicky *sekunda*.

Historická definice *sekundy* je odvozena od rotace Země. V roce 1889 byla zavedena *sekunda* jako $1 / 86\,400$ délky středního slunečního dne (jedna otočka Země). Brzy se zjistilo, že je to špatně, protože Země svou rotaci mění. V roce 1960 byla nahrazena zlomkem doby oběhu Země kolem Slunce. Zjistilo se, že i toto není přesné, protože Slunce vyzařuje energii, a tím ztrácí svou hmotnost. Země tedy obíhá kolem tělesa, které ztrácí svou hmotnost, čímž se mění i oběžná doba Země kolem Slunce. Takže z dlouhodobé hlediska nelze ani tímto způsobem *sekundu* definovat.

V roce 1967 se k definici *sekundy* využila jemná struktura *základního stavu* atomu cesia ^{133}Cs . *Základní stav* není jedna energetická hladina, protože elektronový obal interaguje s jádrem, které má také spinovou strukturu a nenulový moment hybnosti. To znamená, že jak obal, tak jádro generují magnetické pole. A interakce magnetického pole elektronového obalu s magnetickým polem atomového jádra způsobí rozštěpení hladin včetně základní. Přeskoky (přechody) fotonu v tomto jemném rozštěpení definují *sekundu*, což je $9\,192\,631\,770$ period tohoto přechodu. Takže zde už máme *sekundu* definovanou poměrně přesně frekvencí $9\,192\,631\,770$ Hz:

$$\nu_{\text{Cs}} = 9\,192\,631\,770 \text{ s}^{-1} \Rightarrow 1 \text{ s} = \frac{9\,192\,631\,770}{\nu_{\text{Cs}}}$$

Kdokoli bude chtít zjistit, kolik je sekunda, stačí, když si ve své laboratoři změří tuto frekvenci.

1.2.4.2 Definice metru

Dále potřebujeme měřit vzdálenosti. Je třeba definovat *metr*. V roce 1790 se ukázalo, že v délkových jednotkách je neskutečný chaos. Bylo třeba zavést jednotný systém měření délek. Byl předložen návrh s kyvadlem, kdy závěs je dlouhý právě jeden *metr*, když perioda kmitu kyvadla je jedna *sekunda*. Další návrh byl odvodit *metr* od délky poledníku. Problém je, že oba tyto návrhy jsou závislé na místě měření. Navíc při určení podle poledníku zapoměli započítat zploštění Země, takže se odchýlili o 0,2 mm. Od roku 1799 jsme měli odlitek *metru*, který byl velmi špatný kvůli průhybu a teplotní roztažnosti. V roce 1889 už máme *metr* ze slitiny iridia (10 %) a platiny (90 %), což snižuje tepelnou roztažnost na minimum. Nicméně odvození je od původního *metru*. Tento *metr* se prohlásil za archivní *metr* a zde je počátek souřadnicové soustavy SI. Se zpřesňujícími se měřeními ani tento *metr* dlouhodobě nevyhovoval. V roce 1960 se podařilo prolomit loby kolem tyčového etalonu a *metr* se redefinoval pomocí hyper jemné struktury izotopu kryptonu ^{85}Kr jako násobek vlnové délky záření konkrétního stavu.

V roce 1983 proběhla nejvýznamnější revoluce v dějinách měření. Do té doby se *metr* skutečně měřil. Byl to nějaký násobek vlnové délky a bylo třeba jej realizovat, což se ukázalo, že není dobře kvůli zanášení chyby měření do rychlosti světla $c = \Delta l / \Delta t$. Rychlost světla c má být univerzální světová konstanta daná přírodou, která nesmí být zatížena chybou měření. Dostávali bychom různé hodnoty c podle toho, jak přesná provádíme měření dráhy Δl a času Δt . A to je nepřijatelné. Proto jsme v roce 2019 rychlost světla c zafixovali na konkrétní hodnotu 299 792 458 m/s. Je to naše volba, které přizpůsobujeme měrné jednotky. Takže se to celé otočilo. Konstantu c jsme nechali konstantní a z ní odvodili délku *metru* $\Delta l = c \cdot \Delta t$. Metr je tedy jednotka délky, jejíž hodnota je definovaná vztahem:

$$c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \Rightarrow 1 \text{ m} = \frac{c \cdot 1 \text{ s}}{299\,792\,458}$$

1.2.4.3 Definice kilogramu

Definice *kilogramu* vycházela z objemu 1 dm³ destilované vody při teplotě 4 °C a normálním tlaku. Na tomto základě byl odlit etalon 1 kg. Etalon ovšem podléhá erozi a při čištění mění postupem času svou hmotnost. Za 50 let se změnila jeho hmotnost o 50 mikrogramů, což je relativní změna:

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{50 \cdot 10^{-6}}{1\,000} = 5 \cdot 10^{-8}$$

Vzhledem k Zemi dělá tento rozdíl v hmotnosti etalonu rozdíl v hmotnosti Země o:

$$\frac{\Delta M}{M} = \frac{\Delta m}{m} \Rightarrow \Delta M = M \cdot \frac{\Delta m}{m} = 6 \cdot 10^{24} \cdot 5 \cdot 10^{-8} = 30 \cdot 10^{16} \text{ kg}$$

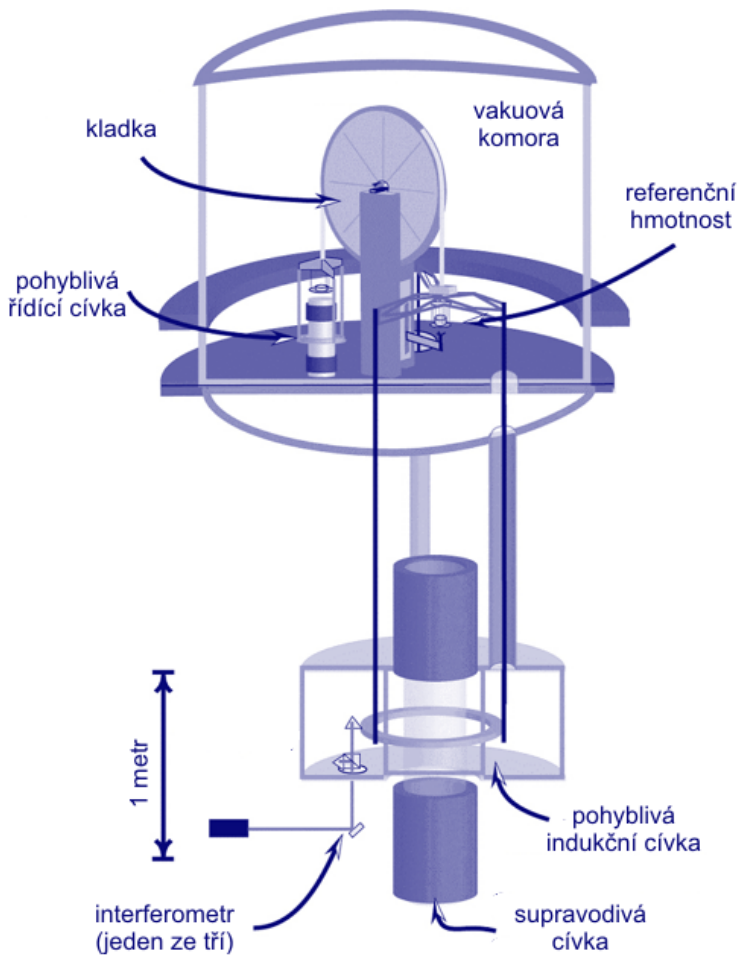
Což je velká změna v hmotnosti Země. Pro další měření již není možné používat stávající etalon. Pro definici *kilogramu* je možné využít Planckovu konstantu, která se dá velmi dobře měřit:

$$h = 6,62607015 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} = \dots \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \cdot \text{s} = \dots \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

Vzhledem k tomu, že *sekundu* a *metr* již máme, tak pokud zafixujeme *Planckovu konstantu*, pak jsme definovali *kilogram* bez použití etalonu. K tomuto došlo v roce 2016, kdy se rozhodlo o zafixování *Planckovy konstanty*. V prosinci 2018 bylo rozhodnuto o výše uvedené konkrétní hodnotě, která pak vešla v platnost v květnu 2019. Pro určení *kilogramu* tedy již není nutný etalon, ale stačí výše uvedený vztah pro definici *Planckovy konstanty*, ze kterého lze určit, co je to *kilogram*. Jinými slovy, mít experiment, ve kterém vystupuje *Planckova konstanta*. Jednou z možností je experiment *Watt Balance*, což je kladka se dvěma závažími různé hmotnosti, kdy lehčí závaží je vyvažováno silou přes supravodivý magnet. V teorii supravodivosti se vyskytuje *Planckova konstanta*, takže rovnice pro rovnováhu těchto dvou těles přes supravodivý magnet obsahuje *Planckovu konstantu*. Původně se tento experiment používal ke zjištění *Planckovy konstanty*. Nyní, když ji máme zafixovanou, jej lze použít k určení *kilogramu*:

$$h = 6,62607015 \times 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \Rightarrow 1 \text{ kg} = \frac{h \cdot 1 \text{ s}}{6,62607015 \times 10^{-34} \cdot 1 \text{ m}^2}$$

Realizaci lze provést z jakéhokoli měření, kde vystupuje *Planckova konstanta*.



1.2.4.4 Definice ampéru

Další jednotkou je *ampér*, což je jednotka elektrického proudu, která byla od svého počátku ukázkou toho, jak se jednotky zavádět nemají: „Máme dva nekonečně dlouhé vodiče nekonečně malého průřezu ve vzdálenosti 1 metr. Proud 1 A přes ně protéká, právě když metr jejich délky na sebe působí silou $2 \cdot 10^{-7}$ N.“

Tento experiment nelze v praxi provést z pochopitelných důvodů. Nelze vyrobit nekonečně dlouhý vodič nekonečně malého průřezu. Navíc kdyby vodič měl zanedbatelný průřez, tak přes něj nepoteče žádný proud. A nejhorší věcí je definice přes *newton*, což je *hmotnost krát zrychlení*. Znamená to, že *ampér* byl definován přes *kilogram*. Nestabilita etalonu *kilogramu* se nám zanesla do definice *ampéru*. Etalon *kilogramu*, který byl uložený v Paříži, nám v minulosti zlikvidoval většinu jednotek soustavy SI.

Jak tedy zavést *ampér*? Elektrický proud je náboj, který proteče za jednotku času. Hodnota elementárního náboje je:

$$e = 1,602176634 \times 10^{-19} \text{ C} = \dots \text{ A} \cdot \text{s}$$

Protože *sekundu* již máme, tak pokud zafixujeme náboj *elektronu*, určíme co je *ampér*. Toto je také platné od května 2019. *Ampér* je tedy jednotka elektrického proudu, jejíž hodnota je definovaná vztahem:

$$e = 1,602176634 \times 10^{-19} \text{ A} \cdot \text{s} \Rightarrow 1 \text{ A} = \frac{e}{1,602176634 \times 10^{-19} \cdot 1 \text{ s}}$$

Realizaci lze provést z jakéhokoli měření, kde vystupuje *elementární náboj*.

1.2.4.5 Definice kelvinu

Kelvin je jednotkou termodynamické teploty. Je definován přes zafixovanou *Boltzmannovu konstantu* k_B vztahem:

$$k_B = 1,380649 \times 10^{-23} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1} \Rightarrow 1 \text{ K} = \frac{1,380649 \times 10^{-23} \cdot 1 \text{ kg} \cdot 1 \text{ m}^2}{k_B \cdot 1 \text{ s}^2}$$

Realizaci lze provést z jakéhokoli měření, kde vystupuje *Boltzmannova konstanta*.

1.2.4.6 Planckovy škály

Na počátku 20. století přemýšlel Max Planck o tom, jestli by nemohly existovat nějaké *přirozené jednotky*, protože si byl vědom skutečnosti, že *metr* byl odvozován z obvodu Země, *sekunda* byla odvozována z rotace Země a podobně, což nebylo úplně správně, a tak se pokoušel hledat takové kombinace základních konstant (*Planckovy konstanty* h , *gravitační konstanty* G a *rychlosti světla* c), které by definovaly *délku* l , *čas* t , *hmotnost* m a *energii* E jako *přirozené jednotky*. Nakonec se mu skutečně podařilo zkombinovat základní konstanty způsobem, který jednoznačně dá *délku*, *čas*, *hmotnost* a *energii*:

$$l_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 10^{-35} \text{ m} \quad ; \quad t_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \approx 10^{-43} \text{ s} \quad ; \quad m_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \approx 10^{-8} \text{ kg} \quad ; \quad E_p = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}} \approx 10^{19} \text{ GeV}$$

Dále se spekulovalo o tom, jaký by mohl být význam těchto *přirozených jednotek*, kterým říkáme *Planckovy jednotky* (*Planckovy škály*). Ukázalo se, že *Planckova délka* je vzdálenost, kde by už nějak rozumně mohly fungovat *kvantové fluktuace* a že na této úrovni $l_p = 10^{-35}$ metru už svět nebude hladký; možná bude obsahovat další zakřivené dimenze a podobně. Čas $t_p = 10^{-43}$ sekundy by zase měl odkazovat na období, ve kterém se oddělovala (*vznikala*) *gravitační interakce* ve vesmíru.

Planckova délka $l_p = 10^{-35}$ metru sahá daleko za hranice, kam jsme schopni dosáhnout. Dnes rozumíme rozměru *protonu*, což je velikost 10^{-15} metru a s milionkrát opakovanými měřeními jsme schopni maximálně určit vzdálenost s přesností 10^{-18} metru, jako například na zařízení *LIGO* (*Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory*) pro hledání gravitačních vln. Tady jsou naše současné hranice. Věci jako je *nekomutativnost prostoru* by se měly objevit až na hranici 10^{-28} metru. *Planckovy škály* jsou tedy nejenom mimo naše technické možnosti, ale i zcela mimo naši představivost. Velmi zajímavou věcí je skutečnost, že samotný život, jak ho vnímáme a zkoumáme v řádu 10^{-5} metru, se nachází někde uprostřed mezi největšími rozměry ve vesmíru, což je v řádu 10^{25} metrů, a nejmenšími rozměry definované *Planckovou škálou*, což je v řádu 10^{-35} metru. Od největších a nejmenších struktur nás tedy dělí 30 řádů.

1.2.4.7 Jiná soustava jednotek

V Astronomii se dosti často používá jiná soustava jednotek, než je *soustava SI*. Velmi často píšeme, že rychlost světla c je rovna jedné. Je to trochu jiná filozofie:

$$c = 1$$

$$299\,792\,458 \text{ m/s} = 1$$

$$299\,792\,458 \text{ m} = 1 \text{ s}$$

Pokud toto uděláme, můžeme převádět *metry* na *sekundy*. Můžeme mít nejenom *sekundu času*, ale i *sekundu délky*. Jedna *sekunda délky* (*světelná sekunda*) je vzdálenost, kterou uletí světlo za sekundu. Můžeme mít také *den délky* (*světelný den*) nebo *rok délky* (*světelný rok*) a podobně. Takže položením

$c = 1$ máme převod mezi *sekundami* a *metry*. Dále tedy mohu mít nejenom *metr délky*, ale i *metr času*. *Metr času* je doba, za kterou světlo uletí *metr*. Výhoda těchto jednotek je, že mohu *délku* i *čas* měřit ve stejných jednotkách.

V mechanice máme 3 základní jednotky, kterými jsou *kilogram*, *metr* a *sekunda*. Při požadavku $c = 1$ jsme sjednotili *metr* a *sekundu* do jedné jednotky. Dále máme k dispozici gravitační konstantu G a Planckovu konstantu h .

Pokud položíme $c = 1$ a $G = 1$, pak jsme schopni měřit *hmotnost*, *prostor* a *čas* jednou jednotkou (třeba v sekundách). To je soustava jednotek, která se využívá v obecné relativitě:

$c = 1; G = 1; m, l, t$ měřím ve stejných jednotkách

Pokud položíme $c = 1$ a $h = 1$, pak budeme mít opět pro *hmotnost*, *prostor* i *čas* jednu jedinou jednotku. To je soustava jednotek, která se využívá v kvantové teorii:

$c = 1; h = 1; m, l, t$ měřím ve stejných jednotkách

Jsou to takzvané *přirozené jednotky*.

1.2.4.8 Měření vzdáleností v astronomii

V astronomii se využívají 3 základní jednotky měření délky. Je to *astronomická jednotka (AU)*, *světelný rok (ly)* a *parsek (ps)*:

Astronomická jednotka (AU) se definovala jako střední vzdálenost Země od Slunce. Tato definice měla problém, protože Země se od Slunce vzdaluje kvůli tomu, že se mění moment její hybnosti tím, že Slunce ztrácí svoji hmotnost vyzařováním. Výsledkem je že se *astronomická jednotka* dnes označuje malými písmenu *au* a činí přesně 149 597 870 700 m. Nijak již nesouvisí s dráhou Země kolem Slunce. Je to konkrétní zafixované číslo odvozené z *metru*.

Co se týče *světelného roku (ly)*, na kosmologických vzdálenost je třeba započítat rozpínání vesmíru. Například světlo, které letělo 10 miliard let, ve skutečnosti urazilo dráhu cca 40 miliard světelných let.

Parsek (ps) neboli paralaktická sekunda je vzdálenost, ze které vidíme střední vzdálenost Země od Slunce (1 *AU*, nyní 1 *au*) pod úhlem jedné obloukové sekundy.

2. PRINCIP EKVIVALENCE

2.1 Gravitační a setrvačná hmotnost

Ve vztahu $F = m \cdot a$ se nyní zaměříme na hmotnost m . Jak bylo uvedeno, fyzika v současnosti definuje sílu buď přes zakřivený prostor a čas nebo přes výměnné polní částice. Obecně relativistický popis je ovšem závislý na takzvaném *principu ekvivalence* související právě s pojmem hmotnosti. Nejprve si zavedeme takzvanou

- (a) hmotnost *gravitační* m_G , což je hmotnost měřená prostým vážením. Je to hmotnost, kterou se přitahují dvě tělesa. *Gravitační hmotnost* je tedy mírou gravitační přitažlivosti těles. Je to čistě gravitační záležitost vycházející z gravitačního zákona

$$m \cdot a = F = G \cdot \frac{m_G \cdot M_G}{r^2}$$

Druhá hmotnost je

- (b) hmotnost *setrvačná* m_S , která vyjadřuje schopnost těles setrvávat v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu. Souvisí to se *silou*, kterou musíme vyvinout, abychom těleso rozpochovali na určitou rychlost v rámci nějakého časového úseku nebo naopak zbrzdili. Důležité je si uvědomit, že k těmto experimentům nepotřebujeme gravitaci. Je to hmotnost měřená setrvačnými účinky. Nikde není dáno, že by tyto dvě hmotnosti měli být stejné. Platí:

$$m_S \cdot a = F \Rightarrow a = \frac{F}{m_S}$$

Čím větší *síla*, tím větší zrychlení; čím větší *setrvačná hmotnost*, tím menší zrychlení. To znamená, že v pohybovém zákoně máme *setrvačnou* hmotnost vyjadřující setrvačné účinky tělesa. Tato *síla* nemusí být vůbec gravitační. Může to být *síla* nárazová (mechanická), elektrická, viskózních procesů, harmonických oscilací a podobně. Takže jestliže jakoukoli obecnou silou měním pohybové vlastnosti tělesa, tak těleso se brání této změně svou *setrvačnou* hmotností.

Pro obě hmotnosti můžeme zavést etalony a zkoumat, které těleso má dvojnásobnou hmotnost než příslušný etalon a podobně. Můžeme také zavést jednotný etalon pro *gravitační* i *setrvačnou* hmotnost. Ale nikdo nezaručí, že pokud budu mít těleso, které má desetkrát větší *setrvačnou* hmotnost než tento etalon, bude mít také desetkrát větší *gravitační hmotnost*. Čili *setrvačná* a *gravitační hmotnost* si sobě nemusí být úměrné. Pokud by si byly úměrné ($m_S \sim m_G$), mělo by to dalekosáhlé důsledky. V případě volného pádu máme v pohybovém zákoně *setrvačnou* hmotnost m_S a sílu působící na těleso F danou gravitačními účinky:

$$m_S \cdot \ddot{y} = F = m_G \cdot g$$

Pokud by si tedy *setrvačná* a *gravitační hmotnost* byly úměrné, pak můžeme zvolit jeden etalon pro obě hmotnosti, čímž si budou sobě rovny. Pokud zvolíme různé etalony, bude mezi nimi konstanta úměrnosti. V obou případech pak můžeme ze vztahu vykrátit hmotnost. V případě jednotného etalonu bez konstanty úměrnosti bude zrychlení těles dáno pouze tíhovým zrychlením:

$$\ddot{y} = g$$

Nebude tedy záviset na hmotnosti těles, což je experimentálně ověřitelné. Například, když pustím z výšky současně dvě tělesa různých *gravitačních* hmotností (odpor vzduchu musí být zanedbatelný), můžu zkoumat, jestli na zem dopadnou ve stejném časovém okamžiku. Z tohoto jednoduchého experimentu by se mohlo zdát, že *setrvačná* a *gravitační hmotnost* si mohou být úměrné. Pokud bych

nebral v úvahu tíži, ale vezmu obecně gravitační zákon (například těleso obíhající druhé těleso, které má *setrvačnou a gravitační hmotnost*)

$$m_S \cdot \vec{a} = G \cdot \frac{m_G \cdot M_G}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

tak, pokud jsou si obě hmotnosti úměrné nebo rovny, opět dospějeme k závěru, že pohyb tělesa nebude záviset na jeho hmotnosti. To znamená, že je úplně jedno, jestli kolem Slunce obíhá celá planeta nebo šroub z raketoplánu (stejná rychlost). Vše se bude pohybovat po stejné dráze bez ohledu na hmotnost:

$$m_S = m_G \Rightarrow \vec{a} = G \cdot \frac{M_G}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

Takže pokud by platilo $m_S \sim m_G$, pak má smysl mít jeden etalon pro obě hmotnosti a ztotožnit je, jak jsme to v minulosti již udělali. Pohyby těles například kolem Slunce pak nebudou záviset na tělesech samotných (na jejich hmotnosti), ale na mnohem hmotnějším Slunci, které způsobilo, že se všechna tělesa kolem něj pohybují jednotným způsobem. Tohoto využil Albert Einstein v konstrukci obecné relativity. Řekl, že gravitace není silové působení těles, ale je způsobená tím, že Slunce zakřivilo prostor a čas kolem sebe a tomto křivém časoprostoru se všechno pohybuje po nejrovnějších možných drahách. Pak je samozřejmě jedno, jestli se v tomto pokřiveném světě pohybuje šroubek nebo celá planeta. Výsledek je stejný.

Obecná teorie relativity je primárně založená na dvou větech:

- (1) Každé těleso zakříví prostor a čas kolem sebe.
- (2) V tomto pokřiveném světě se tělesa pohybují po nejrovnějších možných drahách, takzvaných *geodetikách*.

Z filozofického hlediska je to zcela něco jiného. Dříve jsme tvrdili, že Země se pohybuje kolem Slunce, protože na ni působí gravitační síla. Dnes tvrdíme, že Země se pohybuje kolem Slunce, protože Slunce takto pokřivilo svět. Geometrická teorie gravitace, která převádí gravitační sílu na pokřivenou geometrii, je velmi úspěšná mimo jiné i proto, že na rozdíl od Newtonovské fyziky je to polní teorie. Čili zahrnuje zpoždění signálu, které neobsahují Newtonovy pohybové rovnice. V obecné relativitě se tedy signál šíří maximální možnou rychlostí, což je rychlost šíření informace.

2.2 Princip ekvivalence

Celá konstrukce obecné relativity tedy stojí na předpokladu, že *setrvačná a gravitační hmotnost* jsou si úměrné:

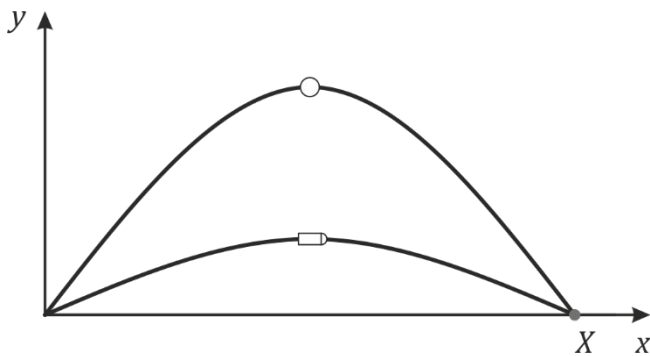
$$m_S \sim m_G$$

Kdyby toto neplatilo, tak se nám obecná relativita zhroutí jako domeček z karet. Tedy všechno je to založené na jednoduchém *principu ekvivalence setrvačné a gravitační hmotnosti*. Pokud toto skutečně platí, pak můžeme popisovat pohyby těles pomocí zakřiveného časoprostoru. Má to celou řadu důsledků. V Newtonovské fyzice jsme se nestarali o to, co je prostor a čas. Ty v ní figurovaly jako jeviště, na kterém se pohybují tělesa. Dokonce i ve *speciální teorii relativity (STR)* figuruje prostor a čas jako neměnné kontinuum, kde je pouze ta novinka, že pokud se na časoprostor díváme z různých souřadnicových *inerciálních soustav*, tak se nám jeví různě (dilatace času, kontrakce délek, nárůst hmotnosti). Ale to nic nemění na tom, že čas a prostor je v *STR* předem dán. V *obecné teorii relativity (OTR)* je to ovšem zcela něco jiného. Zde Slunce samotným zakřivením vytváří prostor a čas kolem sebe neboli prostor a čas je spoluvytvářen tělesy. Rovnice vypadá tak, že nalevo je dvouindexová veličina popisující zakřivení časoprostoru a napravo je rozložení hmoty ve vesmíru:

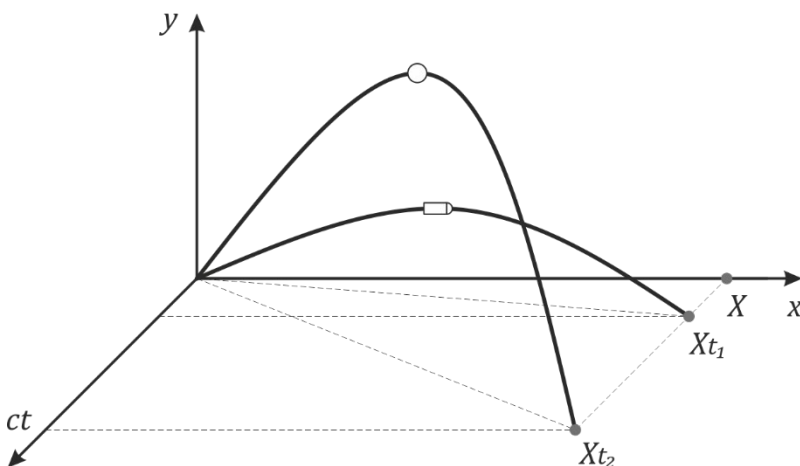
$$G_{\mu\nu} \sim T_{\mu\nu}$$

Takto jednoduchý je gravitační zákon obecné relativity. Rozložení hmoty je totéž co zakřivení časoprostoru. Pokud bychom položili ve výrazu napravo nulu a neměli tedy žádnou hmotu, tak nalevo nemáme žádný prostor a čas. Čili prostor a čas je vytvářen samotnými tělesy v podobě zakřivení kolem těchto těles. V obecné relativitě tedy neexistuje prostor a čas bez existence těles. Každé těleso přispívá k existenci této entity. Historicky je to první teorie, která odpovídá na to, co je to prostor a čas a není to jenom něco fiktivního mimo tuto teorii. Obecná relativita tedy přinesla zcela novou filozofii.

Uvedme příklad zakřivení časoprostoru. Příklad, u kterého by se na první pohled mohlo zdát, že je v rozporu s výše uvedeným tvrzením.



Představte si, že hodíme kámen ve směru osy x , který letí po balistické křivce a dopadne do místa X . Dále vezmeme pistoli a vystřelíme projektil tak, aby střela dopadla do stejného místa X , jako kámen. Samozřejmě to musíme udělat pod menším úhlem vůči ose x , protože střela má vyšší rychlost a její balistika je jiná. Otázka je, jak je to s tím zakřivením prostoru? Jestli je pravda to, co říká obecná relativita, pak se kámen pohybuje po parabole nikoli proto, že by na něj působila gravitační síla, ale proto, že Země takto zakřivila svět kolem sebe. Proč tedy Země zakřivila prostor jinak pro kámen a jinak pro střelu? Řešení je samozřejmě velmi jednoduché. Zapomněli jsme, že Země zakřivuje nejenom prostor, ale i čas.



Takže v časoprostoru dopadnou kámen a střela do různých míst X_{t_1} a X_{t_2} . Čili skutečné křivky kamene a střely jsou časoprostorové. Kámen letí pomaleji než střela a doletí později.

Vraťme se k *principu ekvivalence*. Jak změřit, zda jsou *setrvačná* a *gravitační* hmotnost sobě úměrné? První měření tohoto druhu prováděl maďarský fyzik Loránd Eötvös kolem let 1906 až 1909. Experiment byl založen na torzním otočení vlákna se zrcátkem, na kterém je zavěšeno rameno, na jehož koncích jsou umístěny dvě různě hmotná tělesa v některých variantách i z různých materiálů. Na zrcátko dopadá paprsek světla, který se od něj odráží směrem do detektoru, čímž lze detekovat pootočení vlákna. Předpokladem je, že na zavěšená tělesa působí gravitace od Země, k čemuž je potřebná *gravitační hmotnost*, neboli gravitační působení je dáno *gravitační* hmotností těles. Současně jsme na rotující Zemi, která se snaží změnit pohybový stav obou těles v závislosti na *setrvačných*

hmotnostech. *Setrvačná* hmotnost těles se podepisuje na odstředivé síle a *Coriolisově síle*. Takže na tato dvě tělesa působí dvě odlišné síly. Pokud by tedy nebyly *gravitační* a *setrvačná hmotnost* sobě úměrné, pak by se vlákno, na kterém jsou zavěšena obě tělesa, mělo torzně otočit, což se dá citlivě detekovat. Loránd Eötvös zjistil, že *setrvačná* a *gravitační* hmotnost jsou si úměrné s relativní přesností 10^{-9} , což je poměrně vysoká přesnost, abychom mohli věřit *obecné teorii relativity*. Ale protože je to velmi zásadní teorie, je potřeba mít ještě přesnější ověření. Za tím účelem bylo provedeno mnoho dalších experimentů, kdy se dosáhlo relativní přesností kolem 10^{-13} . Ale i to bylo pořád málo, takže se vymýšlely nové experimenty. Jedním z nich byl experiment *STEP (A Satellite Test of the Equivalence Principle, Družicový test principu ekvivalence)*. Byl to test založený na setrvačnicích, který se nakonec neuskutečnil.

V roce 2016 vypustila ESA družici *Microscope*, kde se nacházely akcelerometry v podobě dvou koncentrických válečků (vnitřní a vnější). Délka sestavy je 8 cm a průměr 3,5 cm. Tyto sestavy byly celkem dvě. V jedné je vnitřní i vnější váleček ze slitiny platiny, u druhé je vnitřní váleček z platiny a vnější z titanu. Elektrostatickými silami jsou válečky udržovány tak, aby byly soustředné. Pokud by se vnitřní váleček vychyloval, musela by se jeho poloha elektrostaticky dorovnávat, a tím naměříme rozdílné zrychlení vnitřního a vnějšího válečku. Platí-li *princip ekvivalence*, pak na vnitřní i vnější váleček musí působit stejné zrychlení. Účinky na válečky jsou opět gravitační od Země a setrvačné dané oběhem. V tomto experimentu, který byl ukončený v říjnu 2018, se podařilo určit *princip ekvivalence* s relativní přesností 10^{-15} . Připomeňme, že konstrukce obecné relativity vychází ze základního fyzikálního principu o nerozlišitelnosti setrvačných a gravitačních dějů, a to *principu ekvivalence*.

2.3 Silný princip ekvivalence

Jak víme, elektromagnetické záření ze Slunce je schopné odfouknout ohon komety, protože působí tlakem. Je rovněž schopné pohánět sluneční plachetnice (v roce 2010 existovala první sluneční plachetnice). Elektromagnetické záření tedy přenáší *hybnost*, *moment hybnosti* a *energii*. Například mám-li dva *elektrony* v určité vzdálenosti a pohnu jedním z nich, tak se za určitou dobu tato změna projeví i na druhém *elektronu*. Je to proto, že pohyb prvního *elektronu* vytvořil elektromagnetické pole, které přeneslo *energii*, *hybnost* a *moment hybnosti* toho pohybu a za určitou dobu je předalo druhému *elektronu*. Elektromagnetické pole je tedy nositelem *energie*, *hybnosti* a *momentu hybnosti*. Není to jenom matematická konstrukce pro popis dějů, ale fyzikální entita. Takže jestliže elektromagnetické záření je nositelem energie, pak mu přísluší nějaká hmotnost podle vztahu:

$$E = m \cdot c^2 \quad (2)$$

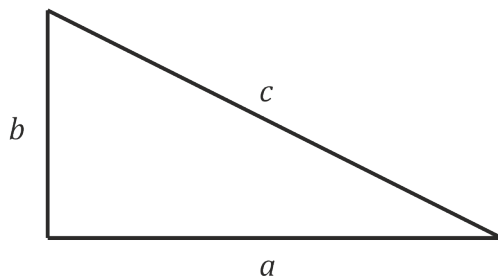
Jaká je to hmotnost? Má tato hmotnost setrvačné účinky? Evidentně má, když je schopna změnit pohybový stav plachetnice. Má také gravitační účinky? Zakřivuje samo elektromagnetické záření prostor a čas (přispívá k jeho existenci)? Víra, že tomu tak je, je *silný princip ekvivalence*. Takže silný *princip ekvivalence* tvrdí, že i elektromagnetické záření má energii, které odpovídá *setrvačná* i *gravitační hmotnost*. Takže i elektromagnetické pole je nositelem *setrvačných* a *gravitačních* účinků. Podle všech dosavadních měření se zdá, že i tento princip platí.

2.4 Velmi silný princip ekvivalence

Samotná gravitace, což je způsob interakce dvou těles, ať už je popsána silou nebo přes zakřivený prostor a čas, je také nositelem energie. Je to podobné jako u elektromagnetismu. Jestliže pohnu nějakým tělesem, pak druhé těleso se o tom dozví přes gravitační pole a následně na to zareaguje. Takže v každém případě je gravitační pole nositelem energie, které přísluší opět hmotnost podle vztahu (2). Má tato hmotnost setrvačné a gravitační účinky? Odpověď ANO je *velmi silný princip ekvivalence*. Takže *velmi silný princip ekvivalence* říká, že i samotné gravitační pole se projevuje *setrvačností* a *gravitací*.

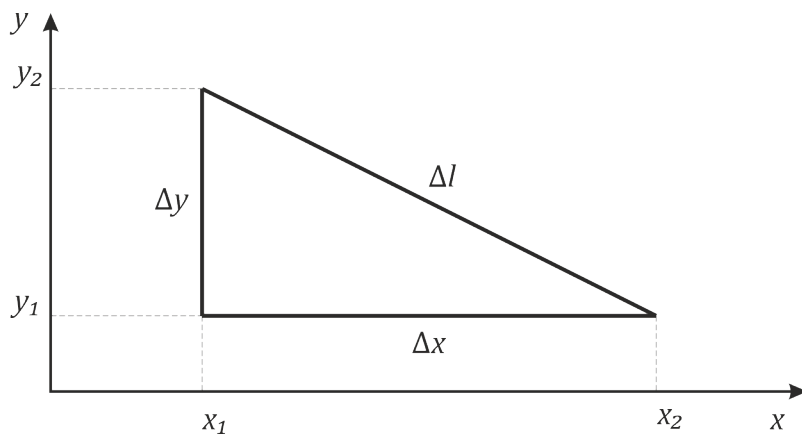
3. POPIS POKŘIVENÉHO SVĚTA

Všem je jistě známá Pythagorova věta:



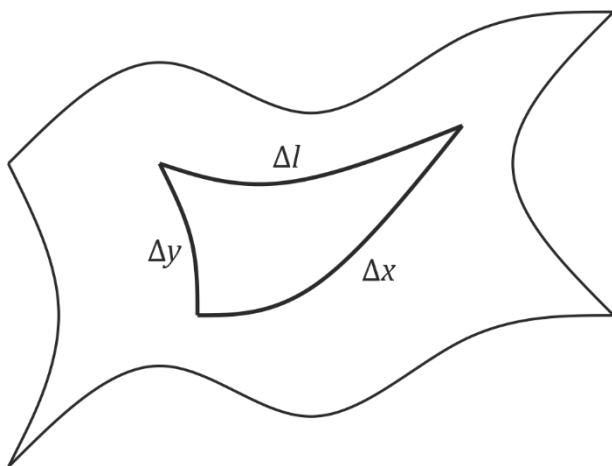
$$a^2 + b^2 = c^2$$

V kartézské soustavě souřadnic můžeme psát:



$$\Delta l^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$$

Pokud bychom Pythagorovu větu konstruovali na zakřivené ploše, pak trojúhelník musí být dostatečně malý, aby věta platila.

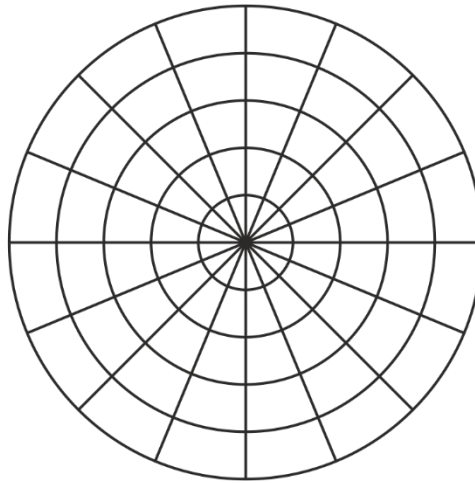
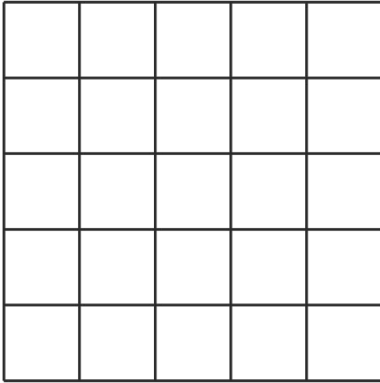


Proto v zakřiveném světě budeme psát Pythagorovu větu v infinitesimálním tvaru:

$$dl^2 = dx^2 + dy^2$$

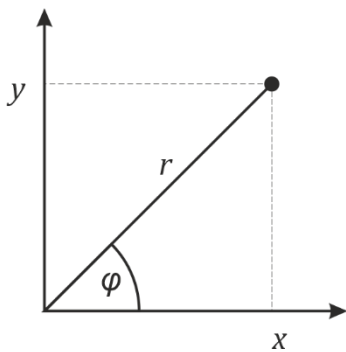
3.1 Metrika v polárních souřadnicích

Zavedme místo kartézské souřadnicové sítě x, y polární souřadnicovou síť r, φ . Pro tyto souřadnice také platí, že jsou *ortogonální* (souřadnicové čáry se vždy protínají v pravém úhlu). Netvoří ovšem již pravouhloú síť jako jsme zvyklí u kartézských souřadnic. Čili něco je tady pokřivené. Zatím jsou to souřadnicové čáry. Samotný prostor (plocha) ještě pokřivený není.



3.1.1. Pythagorova věta v polárních souřadnicích (odvození 1)

Popišme, jak bude vypadat Pythagorova věta v tomto světě popsaném křivými souřadnicemi.



$$x = r \cdot \cos \varphi$$

$$y = r \cdot \sin \varphi$$

Dosadíme do infinitezimálního tvaru Pythagorovy věty:

$$\begin{aligned} dl^2 &= dx^2 + dy^2 = [d(r \cdot \cos \varphi)]^2 + [d(r \cdot \sin \varphi)]^2 \\ &= [dr \cdot \cos \varphi - r \sin \varphi d\varphi]^2 + [dr \cdot \sin \varphi + r \cos \varphi d\varphi]^2 = \\ &= \cos^2 \varphi dr^2 - 2r \cos \varphi \sin \varphi dr d\varphi + r^2 \sin^2 \varphi d\varphi^2 \\ &\quad + \sin^2 \varphi dr^2 + 2r \cos \varphi \sin \varphi dr d\varphi + r^2 \cos^2 \varphi d\varphi^2 \\ &= dr^2 + r^2 d\varphi^2 \end{aligned}$$

Nyní máme Pythagorovu větu jak v kartézských, tak v polárních souřadnicích:

$$dl^2 = dx^2 + dy^2$$

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$$

(3)

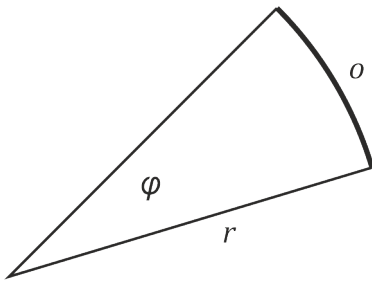
Co se změnilo? V kartézských souřadnicích jsou koeficienty u odvěsen rovny jedné, kdežto v polárních souřadnicích je první koeficient rovný jedné a druhý r^2 , což je funkce. Když koeficient v Pythagorově větě není roven jedné, tak to může znamenat, že je křivý souřadnicový systém nebo že je křivý prostor. Toto je klíč k popisu zakřiveného prostoru a času. V rovnicích budou nějaké koeficienty, které už nebudou rovny jedné. Obecně je tedy vzdálenost ve čtyřrozměrném světě dána výrazem:

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + g_{11}dx^2 + g_{22}dy^2 + g_{33}dz^2 \quad (4)$$

Kde koeficienty g_{kl} se nazývají *metrické koeficienty*, které určují vlastnosti pokřiveného prostoru a času. V kartézském světě jsou to jedničky v prostorové části.

3.1.2 Pythagorova věta v polárních souřadnicích (odvození 2)

Toto odvození Pythagorovy věty v polárních souřadnicích lze udělat efektivněji jiným způsobem. Historicky měříme úhly v různých jednotkách, jako jsou stupně, grady a podobně, nebo si můžeme vytvořit jiné jednotky. Základní vlastností úhlu ovšem je, že podíl délky oblouku a poloměru do vrcholu úhlu je vždy stejný:



$$\varphi = \frac{o}{r}$$

Takže pravý úhel bude:

$$\varphi = \frac{2\pi r/4}{r} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

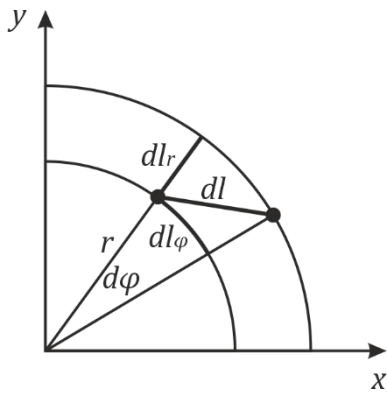
Této míře říkáme *radiány* a je to přirozená míra pro měření úhlů jako délka oblouku k jeho poloměru. Pokud nás zajímá oblouk, pak platí:

$$o = \varphi \cdot r$$

$$\frac{do}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot r$$

$$v = \omega r$$

kde v je oblouková rychlost a ω je úhlová rychlost. Mějme polární souřadnicový systém a těleso, které se pohybuje. Potom můžeme psát:



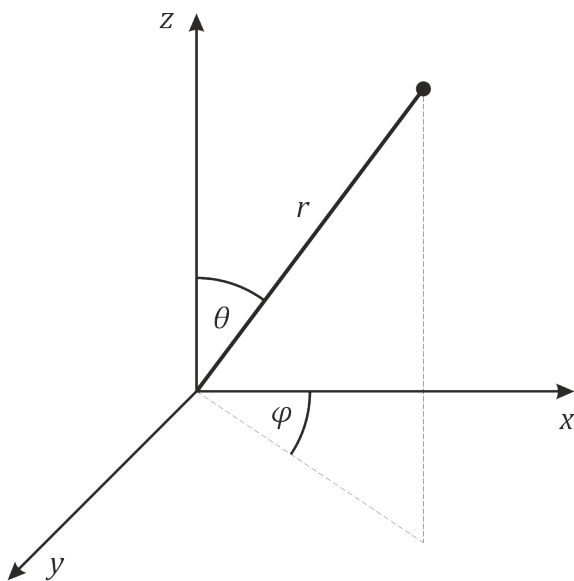
$$dl_r = dr$$

$$dl_\varphi = r \cdot d\varphi$$

$$dl^2 = dl_r^2 + dl_\varphi^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$$

Dospěli jsme ke stejnému výrazu jako v předchozím případě, aniž bychom museli provádět derivace. Takže Pythagorovu větu jsme dostali přímo z obrázku polárních souřadnic. Tímto způsobem se dají určovat *metrické koeficienty*. V tomto případě jsou to 1 a r^2 . V obecné relativitě ovšem není pokřivený jenom souřadnicový systém, ale i samotný svět. Toto dokážeme odlišit pomocí takzvaného *Riemannova tenzoru křivosti*. Můžeme tak určovat, co ty nejednotkové metrické koeficienty způsobilo. Zda to je křivý souřadnicový systém nebo pokřivený svět.

3.2 Metrika ve sférických souřadnicích



Mějme 3 souřadnice r, θ, φ . Souřadnice r je vzdálenost od počátku, souřadnice θ je odklon od osy z a souřadnice φ je azimutální úhel v rovině x, y .

(a) Pohyb v radiální souřadnici r

Pro $r = konst$ dostáváme povrchy koulí

$$dl_r = dr \quad ; \quad r \in (0, \infty)$$

(b) Pohyb v souřadnici θ

Pro $\theta = konst$ dostáváme povrchy kuželů

$$dl_\theta = r \cdot d\theta \quad ; \quad \theta \in \langle 0, \pi \rangle$$

(c) Pohyb v v azimutu φ

Pro $\varphi = \text{konst}$ dostáváme roviny

$$dl_\varphi = r \cdot \sin \theta d\varphi \quad ; \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

Nyní můžeme zkonstruovat Pythagorovu větu pro sférické souřadnice:

$$dl^2 = dl_r^2 + dl_\theta^2 + dl_\varphi^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (5)$$

Odečteme metrické koeficienty:

$$g_{rr} = 1 \quad , \quad g_{\theta\theta} = r^2 \quad , \quad g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2 \theta$$

Poznamenejme, že všechny souřadnicové plochy (koule, kužele, poloroviny se protínají pod úhlem 90° . Čili sférické souřadnice jsou *ortogonální* souřadnice. Prozatím jsme tedy měli pouze pokřivené souřadnice v rovném světě.

3.3 Využití metrických koeficientů

Pokud máme *metrické koeficienty*, tak známe vlastnosti světa, ať už je pokřivená souřadnicová soustava nebo samotný svět. Pokud budeme mít souřadnice (q_1, \dots, q_n) , například kartézské (x, y, z) , polární (r, φ) , sférické (r, θ, φ) nebo časoprostorové (t, x, y, z) a další, tak element vzdálenosti ds v tomto mnohorozměrném světě bude obecně:

$$ds^2 = g_{11}dq_1^2 + g_{22}dq_2^2 + \dots + g_{nn}dq_n^2 + (g_{12}dq_1dq_2 + \dots)$$

Čili Pythagorova věta obsahuje kvadráty souřadnic modifikované nějakými funkcemi. Když je prostor navíc například nějak torzně zkroucený, nejedná se o *ortonormální* soustavu a podobně, pak bude výraz obsahovat i střížné členy uvedeny v závorce. Pro element míry $d\mu$ platí důležitý vztah:

$$d\mu = \sqrt{\det g} \cdot dq_1 \cdot dq_2 \cdot \dots \cdot dq_n \quad (6)$$

Tento vztah nám při znalosti *metrických koeficientů* umožňuje měřit. Element míry $d\mu$ může být jednorozměrný, pak měříme délky; může být dvourozměrný, pak měříme plochy; může být třírozměrný, pak měříme objemy; může být čtyřrozměrný, pak měříme nějaké hyper objemy; a tak dále. Jedná se tedy o obecnou míru libovolné dimenze. Vyzkoušejme si to na známých věcech.

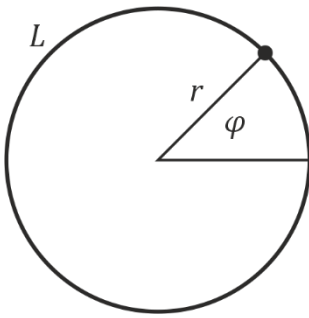
3.3.1 Příklad: Obvod kružnice

Jak popíšeme body na kružnici? Kolik je k tomu potřeba proměnných? Je to jednorozměrný svět, takže potřebujeme jedinou souřadnici, což je azimut φ . Jak bude vypadat Pythagorova věta:

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 \quad ; \quad q_1 = \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

kde $dr = 0$, protože $r = R$. Po úpravě tedy dostaneme výraz s jedním metrickým koeficientem $g_{\varphi\varphi}$:

$$dl^2 = r^2 d\varphi^2 \quad ; \quad g_{\varphi\varphi} = r^2$$



Takže máme matici metrických koeficientů g_{kl} a její determinant:

$$g_{kl} = (g_{\varphi\varphi}) = (r^2)$$

$$\det g_{kl} = \det(g_{\varphi\varphi}) = \det(r^2) = r^2$$

Určíme element míry:

$$d\mu = \sqrt{\det(g)} \cdot dq_1 \cdot dq_2 \cdot \dots \cdot dq_n = \sqrt{r^2} \cdot d\varphi = r \cdot d\varphi$$

$$\mu = L = \int_0^{2\pi} r \cdot d\varphi = r \int_0^{2\pi} d\varphi = r \cdot [\varphi]_0^{2\pi} = 2\pi r$$

3.3.2 Příklad: Plocha kružnice

Jak popíšeme plochu kružnice? Kolik je k tomu potřeba proměnných? Je to dvourozměrný svět, takže Pythagorova věta pro libovolný bod uvnitř kružnice, který je popsán polárními souřadnicemi (r, φ) , bude vypadat takto:

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 \quad ; \quad q_1 = r \in \langle 0, R \rangle \quad ; \quad q_2 = \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

Takže máme matici metrických koeficientů g_{kl} a její determinant:

$$g_{kl} = \begin{pmatrix} g_{rr} & 0 \\ 0 & g_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

$$\det g_{kl} = \det \begin{pmatrix} g_{rr} & 0 \\ 0 & g_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} = r^2$$

Určíme element míry:

$$d\mu = \sqrt{\det g} \cdot dq_1 \cdot dq_2 \cdot \dots \cdot dq_n = \sqrt{r^2} \cdot dr \cdot d\varphi = r \cdot dr \cdot d\varphi$$

$$\mu = S = \iint r \cdot dr \cdot d\varphi = \int_0^R r \cdot dr \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^R \cdot [\varphi]_0^{2\pi} = \frac{2\pi R^2}{2} = \pi R^2$$

3.3.3 Příklad: Objem koule

Jak popíšeme objem koule? Kolik je k tomu potřeba proměnných? Je to třírozměrný svět. Takže Pythagorova věta pro libovolný bod uvnitř koule, který je popsán sférickými souřadnicemi (r, θ, φ) , bude vypadat takto:

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad ; \quad q_1 = r \in \langle 0, R \rangle \quad ; \quad q_2 = \theta \in \langle 0, \pi \rangle \quad ; \quad q_3 = \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

Takže máme matici metrických koeficientů g_{kl} a její determinant:

$$g_{kl} = \begin{pmatrix} g_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & g_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & g_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

$$\det g_{kl} = \det \begin{pmatrix} g_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & g_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & g_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} = r^4 \sin^2 \theta$$

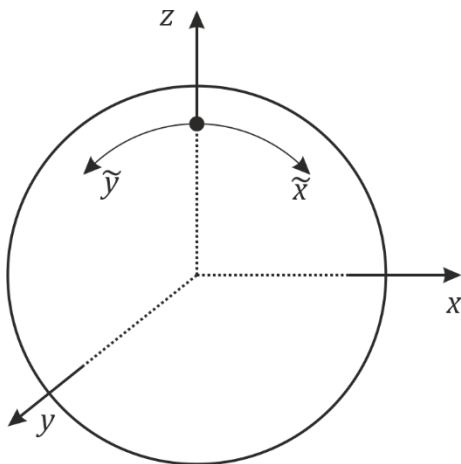
Určíme element míry:

$$d\mu = \sqrt{\det g} \cdot dq_1 \cdot dq_2 \cdot \dots \cdot dq_n = \sqrt{r^4 \sin^2 \theta} \cdot dr \cdot d\theta \cdot d\varphi = r^2 \sin \theta \cdot dr \cdot d\theta \cdot d\varphi$$

$$\begin{aligned} \mu = V &= \iiint r^2 \sin \theta \cdot dr \cdot d\theta \cdot d\varphi = \int_0^R r^2 \cdot dr \cdot \int_0^\pi \sin \theta \cdot d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^R \cdot [-\cos \theta]_0^\pi \cdot [\varphi]_0^{2\pi} \\ &= \frac{R^3}{3} \cdot (1 + 1) \cdot 2\pi = \frac{4\pi R^3}{3} \end{aligned}$$

Takže vidíme, že pokud známe *metrické koeficienty*, tak jsme schopni počítat vzdálenosti, plochy a objemy. Co víc si přát v pokriveném světě.

3.4 Metrika na povrchu koule



Rovnice povrchu koule je dána vztahem:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

V malém okolí bodu na ploše koule se zdá, že lze vytvořit dobrý kartézský souřadnicový systém. Ovšem jakmile jdeme dále od bodu ve směru osy \tilde{x} nebo \tilde{y} , z globálního pohledu již vidíme zakřivení.

Řešme prostor daný povrchem koule. Z globálního pohledu je tedy vidět, že svět povrchu koule a jeho souřadnicový systém je dvourozměrný a zakřivený. Vyjádříme si souřadnici z , protože tuto souřadnici nepoužijeme. Chceme popsat vzdálenosti na povrchu koule pomocí souřadnic x, y :

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

Dále provedeme diferenciaci rovnice koule a vyjádříme dz :

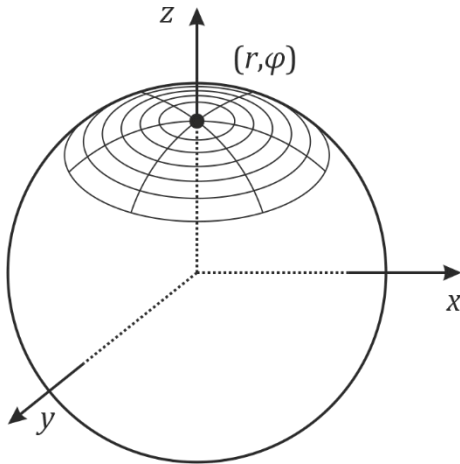
$$2xdx + 2ydy + 2zdz = 0$$

$$x dx + y dy + z dz = 0 \Rightarrow dz = -\frac{x dx + y dy}{z} = -\frac{x dx + y dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

Nyní máme vyjádřenou jak samotnou souřadnici z , tak její diferenciál dz pomocí x a y . Dále můžeme psát vztah pro element vzdálenosti pomocí Pythagorovy věty:

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx^2 + dy^2 + \left(-\frac{x dx + y dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\right)^2 = dx^2 + dy^2 + \frac{(x dx + y dy)^2}{R^2 - x^2 - y^2}$$

Takto vypadá metrika na povrchu koule. Dále vytvoříme lokální polární souřadnicový systém:



$$x = r \cdot \cos \varphi \Rightarrow dx = dr \cdot \cos \varphi - r \cdot \sin \varphi d\varphi$$

$$y = r \cdot \sin \varphi \Rightarrow dy = dr \cdot \sin \varphi + r \cdot \cos \varphi d\varphi$$

Dosadíme do předchozího výrazu pro kvadrát vzdálenosti dl^2 , abychom zjistili, jak to bude se vzdáleností na povrchu koule:

$$\begin{aligned} dl^2 &= (dr \cdot \cos \varphi - r \cdot \sin \varphi d\varphi)^2 + (dr \cdot \sin \varphi + r \cdot \cos \varphi d\varphi)^2 \\ &+ \frac{[r \cdot \cos \varphi (dr \cdot \cos \varphi - r \cdot \sin \varphi d\varphi) + r \cdot \sin \varphi (dr \cdot \sin \varphi + r \cdot \cos \varphi d\varphi)]^2}{R^2 - r^2 \cdot \cos^2 \varphi - r^2 \cdot \sin^2 \varphi} \\ &= (dr^2 \cos^2 \varphi - 2dr \cos \varphi r \sin \varphi d\varphi + r^2 \sin^2 \varphi d\varphi^2) \\ &+ (dr^2 \sin^2 \varphi + 2dr \sin \varphi r \cos \varphi d\varphi + r^2 \cos^2 \varphi d\varphi^2) \\ &+ \frac{[r \cos^2 \varphi dr - r^2 \cos \varphi \sin \varphi d\varphi + r \sin^2 \varphi dr + r^2 \sin \varphi \cos \varphi d\varphi]^2}{R^2 - r^2} \\ &= dr^2 + r^2 d\varphi^2 + \frac{r^2 dr^2}{R^2 - r^2} = \left(1 + \frac{r^2}{R^2 - r^2}\right) dr^2 + r^2 d\varphi^2 = \frac{R^2 - r^2 + r^2}{R^2 - r^2} dr^2 + r^2 d\varphi^2 \\ &= \frac{1}{1 - \frac{r^2}{R^2}} dr^2 + r^2 d\varphi^2 \end{aligned}$$

Jak již víme z předchozího textu, metrika v polárních souřadnicích, kdy jsou pokrivené pouze souřadnice a nikoli svět, je dána výrazem:

$$dr^2 + r^2 d\varphi^2$$

Kdežto výraz

$$\frac{r^2 dr^2}{R^2 - r^2}$$

již souvisí se zakřivením samotné plochy světa. Takže metrika na povrchu koule v polárních souřadnicích je:

$$dl^2 = \frac{1}{1 - \frac{r^2}{R^2}} dr^2 + r^2 d\varphi^2 \quad (7)$$

Odečteme metrické koeficienty:

$$g_{rr} = \frac{1}{1 - \frac{r^2}{R^2}}, \quad g_{\varphi\varphi} = r^2$$

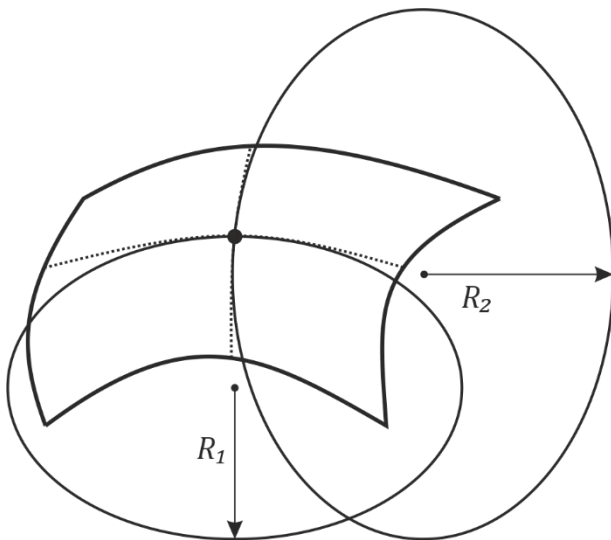
Tentokrát má Pythagorova věta oba koeficienty různé od jedné. Jak víme, koeficient $g_{\varphi\varphi} \neq 1$ znamená pokrivení souřadnicového systému, ale koeficient $g_{rr} \neq 1$ znamená skutečné zakřivení povrchu koule (světa). Představme si, že by se poloměr koule R zvětšil do nekonečna. Co by to znamenalo pro souřadnicový systém? Samozřejmě, že při $R \rightarrow \infty$ se nám polární souřadnicový systém na povrchu koule s poloměrem R vyrovná do roviny:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} dl^2 = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 - \frac{r^2}{R^2}} dr^2 + r^2 d\varphi^2 \right) = dr^2 + r^2 d\varphi^2$$

Dostaneme tak klasický polární systém souřadnic v nepokrivené rovině.

3.5 Gaussova křivost

Definice pojmů: *Oskulační kružnice* rovinné křivky v určitém bodě je kružnice, která tímto bodem prochází, má zde s danou rovinnou křivkou společnou první derivaci (společnou tečnu v tomto bodě) a rovněž i druhou derivaci (co nejvíce se v okolí tohoto bodu křivce přimyká).



Jestliže máme nějakou křivou plochu a v daném bodě této plochy sestrojíme dvě *oskulační kružnice* s poloměry R_1, R_2 , pak *Gaussova křivost* je definována jako:

$$k = \frac{1}{R_1 R_2} ; \quad [k] = \frac{1}{m^2} \quad (8)$$

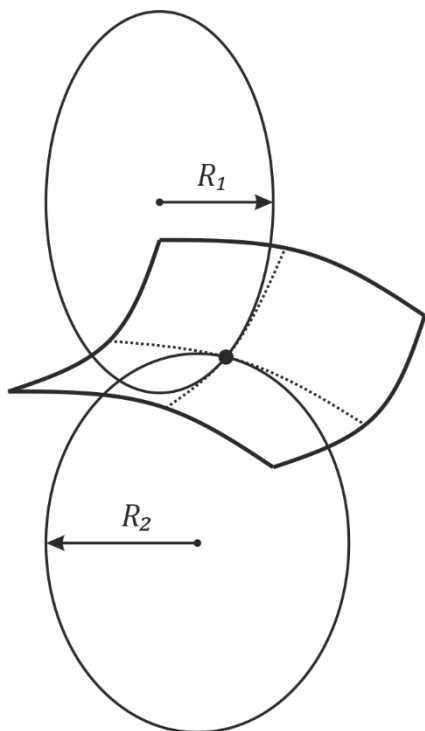
3.5.1 Příklad: Povrch koule

Jaká bude *Gaussova křivost* povrchu koule? Jakékoliv dvě *oskulační kružnice* mají poloměr R , takže *Gaussova křivost* povrchu koule je:

$$k = \frac{1}{R \cdot R} = \frac{1}{R^2}$$

Při $R \rightarrow \infty$ je *Gaussova křivost* $k = 0$, což je logické.

3.5.2 Příklad: Sedlová plocha (sedlo koně)

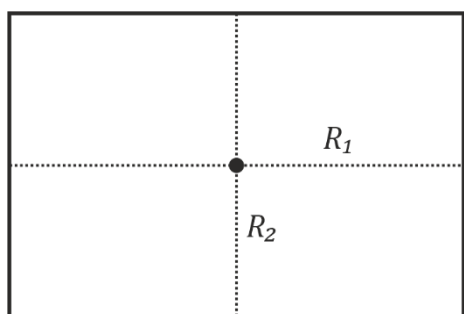


Je vidět, že středy kružnic se nachází na různých stranách sedlové plochy na rozdíl od povrchu koule, kdy středy *oskulačních kružnic* leží na jedné straně. Takže R_1 bude třeba kladné a R_2 záporné. Pak bude křivost:

$$k = \frac{1}{R_1 R_2} < 0$$

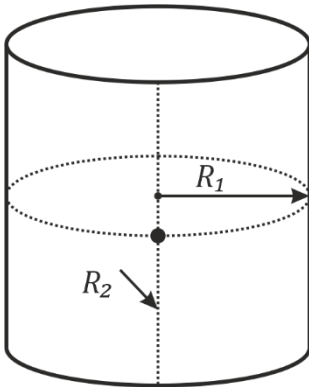
Čili záporná *Gaussova křivost* představuje plochu podobnou sedlu, kdy *oskulační kružnice* mají středy na různých stranách plochy.

3.5.3 Příklad: Rovná plocha (rovný papír)



$$k = \frac{1}{R_1 R_2} = \frac{1}{\infty \cdot \infty} = 0$$

3.5.4 Příklad: Válcová plocha (stočený papír)



$$k = \frac{1}{R_1 R_2} = \frac{1}{R_1 \cdot \infty} = 0$$

Ačkoli by někteří přísahali, že válcová plocha je nějak zakřivená, tak to není pravda. Válcová plocha má nulovou křivost. Součet úhlů v trojúhelníku na válcové ploše je 180 stupňů jako na rovné ploše; obvod kružnice na válcové ploše je $2\pi R$ stejně jako na rovné ploše; rovnoběžky zůstanou rovnoběžné stejně jako na rovné ploše a podobně. Platí zde eukleidovská geometrie.

Takže ve světle *Gaussovy křivosti* bude metrika na povrchu koule dána výrazem:

$$dl^2 = \frac{1}{1 - \frac{r^2}{R^2}} dr^2 + r^2 d\varphi^2 = \frac{1}{1 - kr^2} dr^2 + r^2 d\varphi^2$$

$$dl^2 = \frac{1}{1 - kr^2} dr^2 + r^2 d\varphi^2 \quad ; \quad k = \frac{1}{R^2} \quad (9)$$

Bude-li *Gaussova křivost* nulová, vracíme se do polárních souřadnic; bude-li nenulová kladná, jsme na povrchu vypouklé plochy (koule); bude-li záporná, jsme na nějaké sedlové ploše.

3.6 Minkovského metrika

Hermann Minkowski (1864 - 1909) byl matematik. Proslul především rozpracováním geometrické teorie čísel. Na jeho počest byl pojmenován *Minkovského prostor*, což je čtyřrozměrný prostor (kde čas je jednou z dimenzí), ve kterém platí *speciální teorie relativity*. Jak víme, z Maxwellových rovnic vychází, že rychlost světla je ve všech *inerciálních soustavách* stejná, což nevyhází z klasické mechaniky. Proto bylo třeba mechaniku opravit, aby splňovala stejnou transformaci rychlostí jako elektřina a magnetismus. Opravu provedl Albert Einstein a nazývá se *speciální teorie relativity (STR)*. Tedy základním axiomem *STR* je, že rychlost světla je konstantní ve všech *inerciálních soustavách* neboli změna vzdálenosti s časem pro světlo je rovna univerzální konstantě c . V případě rovného světa *STR* platí:

$$c = \frac{dl}{dt} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{dt}$$

$$c^2 dt^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$0 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$0 = -dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \quad ; \quad x_0 = ct, x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$$

Toto platí pro světlo. V *STR* jsme ukázali, že pro obecně dvě časoprostorové události bude tato kombinace rovněž neproměnná (invariantní), ovšem nenulová:

$$ds^2 = -dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \quad (10)$$

Což je metrika v *STR*. Můžeme odečíst metrické koeficienty, které jsou:

$$g_{00} = -1 \quad , \quad g_{11} = 1 \quad , \quad g_{22} = 1 \quad , \quad g_{33} = 1$$

Dohromady je tedy tato kombinace (10) neproměnná (invariantní). Což je zvláštnost, protože abyste v mechanice udrželi konstantní rychlost světla, musí se vhodně měnit vzdálenosti a čas. To znamená, že z různých inerciálních soustav uvidíme různě velké vzdálenosti (kontrakce délek) a časové intervaly (dilatace času), ale výraz (kombinace proměnných) bude dávat vždy stejný výsledek z těchto různých „úhlů“ pohledu. Jinak řečeno, prostorové a časové vzdálenosti se kompenzují a dávají stejný výsledek. Tomuto se v *STR* říká *interval* a je to tedy invariant. *Interval* je možné zapsat také ve sférických souřadnicích:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (11)$$

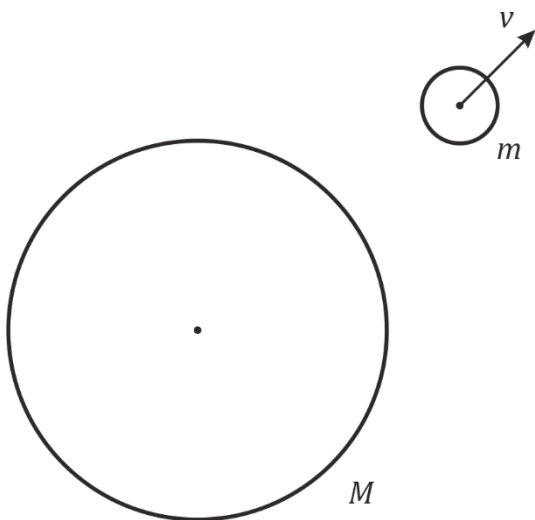
Výraz opět obsahuje prostorovou a časovou část. Stále jde o *Minkowského metriku STR*. Je to metrika rovného časoprostoru. To, že koeficienty zde nejsou rovny jedné, je dáno křivostí vlastního souřadnicového systému, nikoli křivostí prostoru nebo času.

3.7 Schwarzschildova metrika

Pojmenovaná je podle Karla Schwarzschilda (1873 - 1916), který v roce 1916 řešil, jak bude pokřiven čas a prostor kolem sféricky symetrického objektu.

3.7.1 Laplaceovy úvahy (Pierre-Simon Laplace)

Mějme dvě tělesa o hmotnosti M a m :



Mezi nimi bude platit zákon zachování energie:

$$\frac{1}{2}mv^2 - G \frac{mM}{r} = \text{konst.}$$

Gravitační energie musí být záporná, protože těleso se pohybuje přirozeně směrem k nižší *potenciální energii*. Spočítejme únikovou rychlost. Znamená to, že těleso musí mít takovou počáteční rychlost, aby doletělo z daného místa do nekonečna. Takže pro $v \rightarrow 0$ a $r \rightarrow \infty$ musí platit:

$$\frac{1}{2} m_s v^2 - G \frac{m_g M}{r} = 0 - 0 = 0$$

$$\frac{1}{2} m_s v^2 = G \frac{m_g M}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{m_g}{m_s} \cdot \frac{2GM}{r}} = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \quad ; \quad m_s = m_g$$

Princip ekvivalence nám říká, že *setrvačná* a *gravitační* hmotnost jsou si úměrné. Proto je můžeme vykrátit. Pokud tedy chceme určit únikovou rychlost z povrchu tělesa, pak platí:

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \quad (12)$$

Nabízí se otázka, jaký poloměr musí mít těleso, aby úniková rychlost z jeho povrchu byla právě rovna rychlosti světla c :

$$c = \sqrt{\frac{2GM}{R_g}} \Rightarrow R_g = \frac{2GM}{c^2}$$

$$R_g = \frac{2GM}{c^2} \quad (13)$$

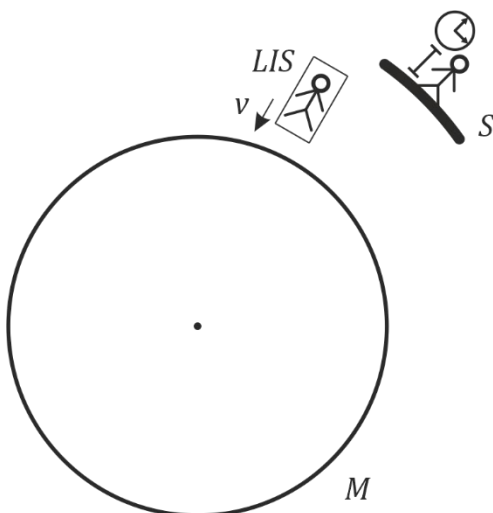
Kde R_g je *gravitační poloměr* nebo také *Schwarzschildův poloměr*. Při menších rozměrech už z tělesa neunikne ani světlo. Pro hmotu Slunce by platilo:

$$R_g = \frac{2GM}{c^2} \cong \frac{2 \cdot 6,67430 \cdot 10^{-11} \cdot 1,989 \cdot 10^{30}}{299\,792\,458^2} \cong 2\,954 \text{ m} \cong 3 \text{ km}$$

Pro hmotu Země by platilo:

$$R_g = \frac{2GM}{c^2} \cong \frac{2 \cdot 6,67430 \cdot 10^{-11} \cdot 5,9736 \cdot 10^{24}}{299\,792\,458^2} \cong 0,0089 \text{ m} \cong 9 \text{ mm}$$

3.7.2 Metrika v okolí sféricky symetrického tělesa



Mějme nějaké těleso o hmotnost M se dvěma pozorovateli. Jeden se nachází v jisté vzdálenosti od tělesa a je vůči němu v klidu (nachází se na nějaké konstrukci nebo na planetě obíhající kolem tohoto centrálního objektu). Druhý volně padá na těleso, a proto se nachází v *lokálním inerciálním systému* (LIS), kde platí zákon setrvačnosti. Pro *interval* v *lokální inerciální soustavě* platí výraz (11):

$$ds_{LIS}^2 = -c^2 dt_{LIS}^2 + dr_{LIS}^2 + r_S^2 d\theta^2 + r_S^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

Čili v *lokální inerciální soustavě* platí speciální relativita. Ovšem pro člověka na oběžné dráze speciální relativita neplatí, poněvadž se nenachází v *inerciální soustavě*. Zažívá tíhové zrychlení od hmotného objektu, který na něj působí silou a podobně. Žije v soustavě S , kde už vnímá pokřivení světa od tělesa s hmotností M . Jaké budou vztahy mezi časovými intervaly? Z hlediska pozorovatele v LIS platí pro soustavu S vztah z *STR* pro *kontrakci délek*:

$$dr_S = dr_{LIS} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Čili pozorovatel v LIS uvidí délku tyče v soustavě S kratší (kontrakce délky) než pozorovatel v soustavě S . S časem to bude obráceně (dilatace času):

$$dt_S = \frac{dt_{LIS}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Takže ne každý z těchto pozorovatelů bude měřit stejné vzdálenosti a časové úseky. To je dáno speciální relativitou, která platí v LIS , ale neplatí v *neinerciálním systému* S . Protože ds^2 je univerzální konstanta, dosadíme do výše uvedeného výrazu pro ds_{LIS}^2 :

$$\begin{aligned} ds_{LIS}^2 &= -c^2 dt_{LIS}^2 + dr_{LIS}^2 + r_{LIS}^2 d\theta^2 + r_{LIS}^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \\ &= -c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) dt_S^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} dr_S^2 + r_S^2 d\theta^2 + r_S^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \end{aligned}$$

Jaká bude rychlost? Spustíme LIS z nekonečna. Letíme-li z nekonečna, počáteční rychlost v je nulová a poloměr r je nekonečný, takže platí:

$$\frac{1}{2}mv^2 - G \frac{mM}{r_S} = \text{konst.} = 0 \Rightarrow v(r) = \sqrt{\frac{2GM}{r_S}}$$

Dosadíme do rovnice pro ds_{LIS}^2 za v , dostáváme:

$$ds_{LIS}^2 = -c^2 \left(1 - \frac{2GM}{r_S c^2}\right) dt_S^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{r_S c^2}\right)} dr_S^2 + r_S^2 d\theta^2 + r_S^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

Toto je metrika, která obsahuje už čas t_S a prostor r_S , to znamená čas a prostor měřený v soustavě S . Tato metrika už ale není metrikou rovného časoprostoru. *Metrické koeficienty* jsou netriviální a nenulové. Ve vztahu výše označme *gravitační poloměr* (*Schwarzschildův poloměr*) R_g , který je dán výrazem (13):

$$ds_{LIS}^2 = -c^2 \left(1 - \frac{R_g}{r_S}\right) dt_S^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{R_g}{r_S}\right)} dr_S^2 + r_S^2 d\theta^2 + r_S^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (14)$$

Takto tedy vypadá metrika v okolí sféricky symetrického tělesa, kterou odvodil z rovnic obecné relativity (nikoli tímto trikem) Karl Schwarzschild v roce 1916. Pro $r_S \rightarrow \infty$ dostáváme *Minkowského metriku* rovného časoprostoru:

$$ds_{LIS}^2 = -c^2 dt_S^2 + dr_S^2 + d\theta^2 + d\varphi^2$$

Čili ve velké vzdálenosti od tělesa je svět rovný. Naopak pro $r_S \rightarrow R_g$ (což například znamená, že hmota našeho Slunce by musela být vměstnána do koule o poloměru menším než 3 km nebo hmota naší Země by musela být vměstnána do koule o poloměru menším než 9 mm a podobně) platí pro *metrické koeficienty*:

$$\lim_{r_S \rightarrow R_g} -c^2 \left(1 - \frac{R_g}{r_S}\right) = 0 \quad ; \quad \lim_{r_S \rightarrow R_g} \frac{1}{\left(1 - \frac{R_g}{r_S}\right)} = \pm\infty$$

Pokud je $r_S > R_g$, pak koeficient u časové souřadnice je záporný a koeficient u prostorové souřadnice je kladný. Čistě hypoteticky, pokud by bylo $r_S < R_g$, pak koeficient u časové souřadnice je kladný a koeficient u prostorové souřadnice je záporný. Vypadá to, jakoby se prohodily prostor a čas mezi sebou. Co je to vůbec čas? Čas je jakákoliv entita mířící jedním směrem. Pod poloměrem R_g je tedy časovou souřadnicí klesající vzdálenost od centra tělesa, která přebírá funkci času. Časová souřadnice se stává radiální a radiální souřadnice se stává časovou, protože tato jediná je záporná. Takovéto oblasti se říká *černá díra*. Je to oblast časoprostoru, kde se látka nachází pod *Schwarzschildovým poloměrem*.

Padající pozorovatel nacházející se v *lokální inerciální soustavě* ovšem nic pozorovat nebude, protože má metriku speciální relativity, ve které není žádný *Schwarzschildův poloměr*. Bez problémů poletí směrem k objektu, aniž by pozoroval něco zvláštního (kromě odlišného silového působení na horní a dolní část těla v závislosti na růstu zakřivení časoprostoru). Jeho pohled je zcela odlišný od pohledu vnějšího pozorovatele. *Schwarzschildova metrika* je tedy metrikou vnějšího pozorovatele. Tak jsme to i počítali (t_S a r_S jsou souřadnice vnějšího pozorovatele).

3.8 Obecné informace a pozorování (část 1)

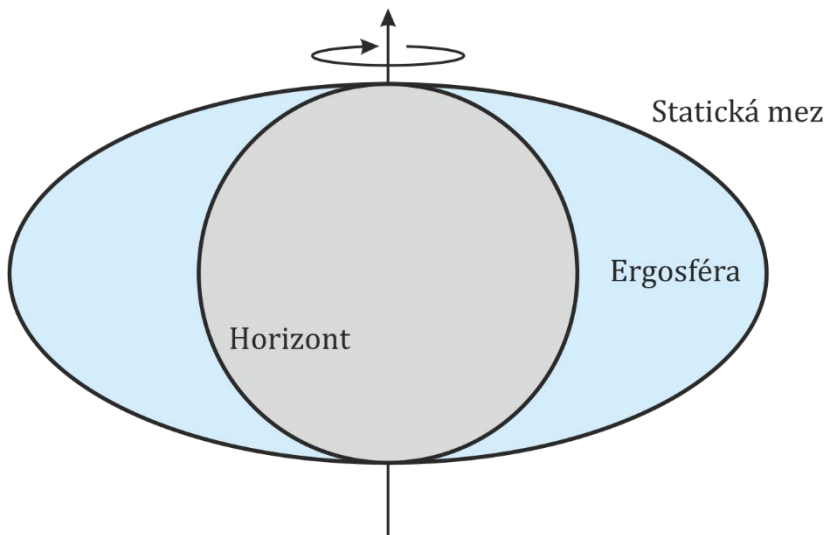
O *černých dírách* jako první uvažoval John Michell (1724 - 1793) už v roce 1783 v tom smyslu, že by mohly existovat hvězdy natolik stlačené, že z nich neunikne ani světlo. První výpočet ovšem provedl až Pierre Simon Laplace v roce 1798, kdy ukázal, že objekt by musel být stlačený na hodnotu $2GM/c^2$, aby úniková rychlost byla rovna rychlosti světla. Pořádně to spočítal z rovnic obecné relativity až Karl Schwarzschild v roce 1916. Tenkrát se těmto podivným hypotetickým zkolabovaným objektům říkalo buď *zkolabované objekty*, nebo *zamrzlé hvězdy*, protože z nich nedokáže uniknout ani světlo. V roce 1967 měl přednášku pro veřejnost John Archibald Wheeler, kde nějakého posluchače napadlo říkat těmto objektům *černé díry*, což se ujalo. V roce 1971 byla objevena první hvězdná *černá díra* o hmotnosti 8 Sluncí, kterou objevil Paul Murdin v souhvězdí Labutě. V roce 1992 byla objevena první *černá díra* velikosti jádra galaxie Hubbleovým dalekohledem. Postupně jich bylo objeveno několik. V roce 2015 následovaly *černé díry* středních hmotností díky zachycení gravitačních vln z kolapsu dvou černých děr velikosti 50 až 60 hmotností Slunce.

Příklady Schwarzschildových poloměrů pro různé objekty podle vztahu $R_g = 2GM/c^2$:

Hmota galaxie	30 světelných let (ly)
Galaktické jádro	2 astronomické jednotky (au) = 300 milionů km
Slunce	3 km
Země	9 mm
Kámen o hmotnosti 1 kg	10^{-27} m (rozměr neutronu je 10^{-15} m)

Vlastnosti černé díry:

- *Schwarzschildův poloměr* neboli horizont značíme R_g . Je to hranice, kde úniková rychlost dosahuje rychlosti světla.
- Poslední stabilní kruhová orbita částic se nachází ve vzdálenosti $3 R_g$ od centra *černé díry*.
- *Fotonová sféra* neboli kruhová orbita fotonů se nachází ve vzdálenosti $1,5 R_g$ od centra *černé díry*.
- *Statická mez* u rotující *černé díry* je hranice, za kterou jsou *fotony* schopny uniknout pouze ve směru rotace. Je to důsledek strhávání časoprostoru rotující *černou dírou*.
- *Ergosféra* je oblast mezi *statickou mezí* a *Schwarzschildovým poloměrem* neboli *horizontem*. Pokud částice vletí do *ergosféry* ve směru rotace *černé díry*, může vylétnout ven s vyšší energií, protože ji rotace udělila hybnost za cenu snížení hybnosti *černé díry*.



3.9 Diagramy vnoření (embedding diagrams)

Jak jsme výše ukázali, *Schwarzschildova metrika* je dána výrazem (14):

$$ds_{LIS}^2 = -c^2 \left(1 - \frac{R_g}{r_s}\right) dt_s^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{R_g}{r_s}\right)} dr_s^2 + r_s^2 d\theta^2 + r_s^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

Ukázali jsme, že při $r_s \rightarrow \infty$ se jedná o plochý časoprostor a to „podivné“ se děje při $r_s \rightarrow R_g \equiv 2GM/c^2$. Ve výrazu si můžeme všimnout, že radiální souřadnice r_s je nějakým způsobem deformována, takže můžeme zavést nějakou skutečnou měřenou souřadnici ρ :

$$d\rho^2 = \frac{1}{\left(1 - \frac{R_g}{r_s}\right)} dr_s^2 \Rightarrow d\rho = \frac{dr_s}{\sqrt{1 - \frac{R_g}{r_s}}}$$

Zde ovšem neplatí vztahy pro eukleidovskou geometrii. Například $S \neq 4\pi r^2$. Dále si všimněme, že úhly ve sférických souřadnicích nejsou nijak deformovány.

Normální člověk si nedokáže představit čtyřrozměrný zakřivený svět (ani třírozměrný). Dokáže si představit nějakou pokřivenou plochu, což jsou dvě dimenze. Protože si nedokážeme představit čtyřrozměrný zakřivený svět, tak existuje matematická technika, které se říká *diagramy vnoření*, kdy si vybereme pouze dvě dimenze z celé metriky a ty interpretujeme jako pokřivenou plochu. Snad nejznámější plocha týkající se *černých děr* je diagram vnoření pro *Schwarzschildovu metriku*.

3.9.1 Příklad: Rovnice plochy Schwarzschildovy metriky (diagram vnoření)

Jedná se o zjednodušené matematické zobrazení, jak si představit pokřivený svět kolem *černé díry*. Pro konstrukci si vybereme dvě souřadnice. Určitě si vybereme souřadnici radiální r_S , protože je na ní dobře vidět pokřivení a dále úhlovou souřadnici φ :

$$ds_{LIS}^2 = -c^2 \left(1 - \frac{R_g}{r_S}\right) dt_S^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{R_g}{r_S}\right)} dr_S^2 + r_S^2 d\theta^2 + r_S^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

Dále zafixujeme čas na hodnotu $t = t_0$ a odklon od osy z úhel $\theta = \pi/2$. Tím jsme se zbavili zbývajících dvou souřadnic (proměnných), které v našem zjednodušeném diagramu nepotřebujeme řešit. Z rovnice *Schwarzschildovy metriky* pak zůstane:

$$ds_{LIS}^2 = \frac{1}{\left(1 - \frac{R_g}{r_S}\right)} dr_S^2 + r_S^2 d\varphi^2 \quad ; \quad t = t_0 \quad , \quad \theta = \pi/2 \quad (15)$$

Což je restrikce na dvě dimenze. Tuto restrikci chceme zobrazit jako dvourozměrnou pokřivenou plochu ve třídímním prostoru:

$$z = f(x, y)$$

Schwarzschildovo řešení je ovšem navrženo pro sféricky symetrické těleso, proto hodnota z bude funkcí pouze vzdálenosti od počátku r_S :

$$z = f(r_S)$$

Protože je to radiálně symetrické, můžeme místo obecných souřadnic x, y použít pouze radiální souřadnici r_S . Pojdme tedy zkoumat element vzdálenosti na takto pokřivené ploše:

$$ds_{LIS}^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx^2 + dy^2 + [f(r_S)' dr_S]^2$$

V rovině x, y zvolíme standardní polární souřadnice r_S, φ a dostáváme:

$$ds_{LIS}^2 = dx^2 + dy^2 + [f(r_S)' dr_S]^2 = dr_S^2 + r_S^2 d\varphi^2 + f(r_S)'^2 dr_S^2 = \left[1 + f(r_S)'^2\right] dr_S^2 + r_S^2 d\varphi^2$$

Rovnice pro vzdálenost na obecné pokřivené ploše je tedy:

$$ds_{LIS}^2 = \left[1 + f(r_S)'^2\right] dr_S^2 + r_S^2 d\varphi^2 \quad (16)$$

Porovnáme-li Schwarzschildovu metriku (15) s rovnicí obecné pokřivené plochy (16), dostaneme:

$$1 + f(r_S)'^2 = \frac{1}{\left(1 - \frac{R_g}{r_S}\right)} \Rightarrow f(r_S)' = \sqrt{\frac{1}{\left(1 - \frac{R_g}{r_S}\right)} - 1} = \sqrt{\frac{1 - \left(1 - \frac{R_g}{r_S}\right)}{\left(1 - \frac{R_g}{r_S}\right)}} = \sqrt{\frac{\frac{R_g}{r_S}}{\left(1 - \frac{R_g}{r_S}\right)}} = \sqrt{\frac{R_g}{r_S - R_g}}$$

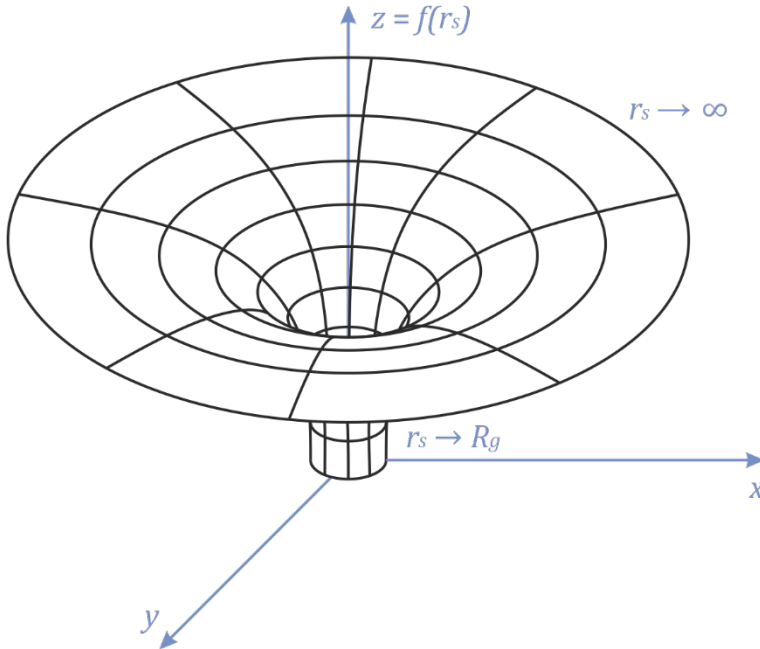
Což je diferenciální rovnice pro funkci $f(r_S)$, která popisuje hledaný *diagram vnoření*. Abychom získali primitivní funkci $f(r_S)$, musíme výraz integrovat:

$$f(r_S) = \int \sqrt{\frac{R_g}{r_S - R_g}} dr_S = \sqrt{R_g} \int (r_S - R_g)^{-\frac{1}{2}} dr_S = 2\sqrt{R_g} \sqrt{r_S - R_g} = \sqrt{4R_g(r_S - R_g)}$$

Nalezli jsme klíčovou funkci pro konstrukci diagramu vnoření:

$$f(r_s) = \sqrt{4R_g(r_s - R_g)} \quad ; \quad r_s \geq R_g \quad (17)$$

Je vidět, že plochu *diagramu vnoření* můžeme konstruovat pouze nad *horizontem*, kde $r_s \geq R_g$:

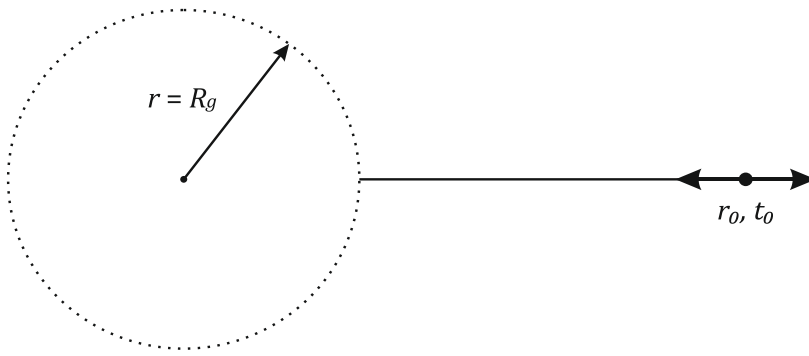


Poznamenejme, že pro $r_s = R_g$ dává funkce $f(r_s)$ nulovou hodnotu. Dá se ukázat, že singularita ve výrazu (15) není fyzikální, ale zvolených souřadnic. Můžeme zvolit takové souřadnice, kde žádná singularita není. Jinými slovy, *Schwarzschildův horizont* není fyzikální singularitou. Jedná se o matematickou vlastnost souřadnic. Pozorovatel procházející *Schwarzschildovým poloměrem* nepocítí nic zvláštního (pokud bude černá díra dostatečně velká, aby jej neroztrhala slapovými silami). Vnějšímu pozorovateli ovšem zmizí.

Je to možné chápat tak, že z hlediska 4dimenzionálního časoprostoru, který je v blízkosti *černé díry* výrazně zakřiven, dochází na jejím *horizontu* k singularitě *metrického koeficientu* u souřadnice r_s ve výrazu pro *Schwarzschildovu metriku* (15). Tento výraz ale není funkcí zakřivení časoprostoru $f(t, x, y, z)$, která by musela být zobrazena na páté souřadnici, kde by bylo toto zakřivení čtyřrozměrného prostoru „vidět“. Tedy pro zobrazení tohoto zakřivení je potřebná pátá dimenze, vzhledem ke které je časoprostor zakřiven a ve které by bylo toto zakřivení vyjádřeno funkcí $f(t, x, y, z)$ pro „čtyřrozměrnou plochu“ podobně, jako to vidíme na konstrukci *diagramu vnoření*, kde dvourozměrná plocha je pokrivena funkcí $f(x, y)$ vzhledem ke třetí dimenzi. Jinými slovy, zakřivení časoprostoru může být vyjádřeno funkcí $f(t, x, y, z)$ podobně, jako je vyjádřeno zakřivení dvourozměrné plochy funkcí $f(x, y)$. Z hlediska vnějšího pozorovatele je maximálního zakřivení dosaženo při $r_s = R_g$, kde funkce zakřivení $f(r_s) = 0$ a kde první derivace této funkce dává onu singularitu *metrického koeficientu* u souřadnice r_s vyjádřenou ve výrazu (15) *Schwarzschildovy metriky*.

3.10 Radiální pohyb světla

Mějme *Schwarzschildův poloměr* $r = R_g$ a pro jednoduchost vyšleme v radiálním směru z bodu r_0 světelný paprsek buď na jednu, nebo druhou stranu. Takže úhly θ a φ jsou konstantní, protože se jedná o radiální směr:



Vydeme ze Schwarzschildovy metriky (14):

$$ds_{LIS}^2 = -c^2 \left(1 - \frac{R_g}{r_S}\right) dt_S^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{R_g}{r_S}\right)} dr_S^2 + r_S^2 d\theta^2 + r_S^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

Pokud by se jednalo o pohyb hmotného bodu, pak $ds_{LIS}^2 \neq 0$. Vzhledem k tomu, že se jedná o světlo, pak $ds_{LIS}^2 = 0$ a máme následující diferenciální rovnici pro šíření světla:

$$0 = -c^2 \left(1 - \frac{R_g}{r_S}\right) dt_S^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{R_g}{r_S}\right)} dr_S^2$$

$$c^2 \left(1 - \frac{R_g}{r_S}\right) dt_S^2 = \frac{1}{\left(1 - \frac{R_g}{r_S}\right)} dr_S^2$$

$$c^2 dt_S^2 = \frac{1}{\left(1 - \frac{R_g}{r_S}\right)^2} dr_S^2$$

$$\pm c dt_S = \frac{1}{1 - \frac{R_g}{r_S}} dr_S$$

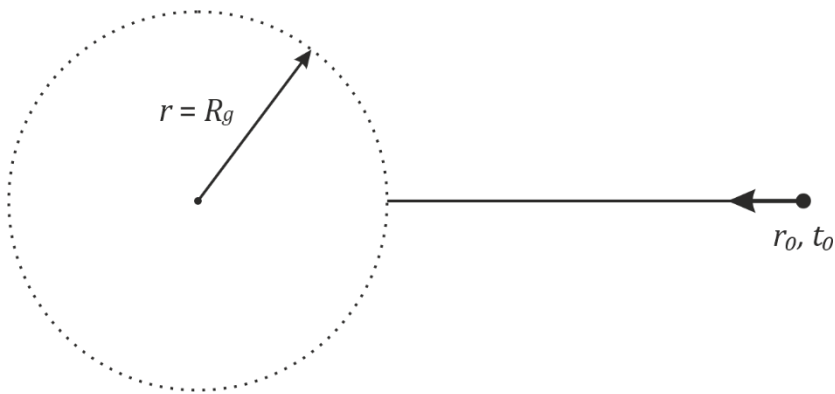
$$\int_{t_0}^t \pm c dt_S = \int_{r_0}^r \frac{1}{1 - \frac{R_g}{r_S}} dr_S = \int_{r_0}^r \frac{r_S}{r_S - R_g} dr_S = \int_{r_0}^r \frac{r_S - R_g + R_g}{r_S - R_g} dr_S = \int_{r_0}^r dr_S + R_g \int_{r_0}^r \frac{1}{r_S - R_g} dr_S$$

Po integraci dostáváme:

$$\pm c(t - t_0) = (r - r_0) + R_g \ln \frac{r - R_g}{r_0 - R_g} \Rightarrow r = r_0 \pm c(t - t_0) - R_g \ln \frac{r - R_g}{r_0 - R_g} \quad (18)$$

Všimněme si, že za existenci posledního, červeně označeného členu rovnice (18) může Schwarzschildova geometrie a vyjadřuje zakřivení časoprostoru kolem sféricky symetrického objektu. Bez tohoto členu by se jednalo pouze o plochý časoprostor.

3.10.1 Příklad: Pohyb paprsku z bodu r_0 směrem k horizontu



Určeme, za jak dlouho doletí paprsek světla k *horizontu černé díry*. Použijeme první vyjádření výrazu (18):

$$-c(t - t_0) = (r - r_0) + R_g \ln \frac{r - R_g}{r_0 - R_g}$$

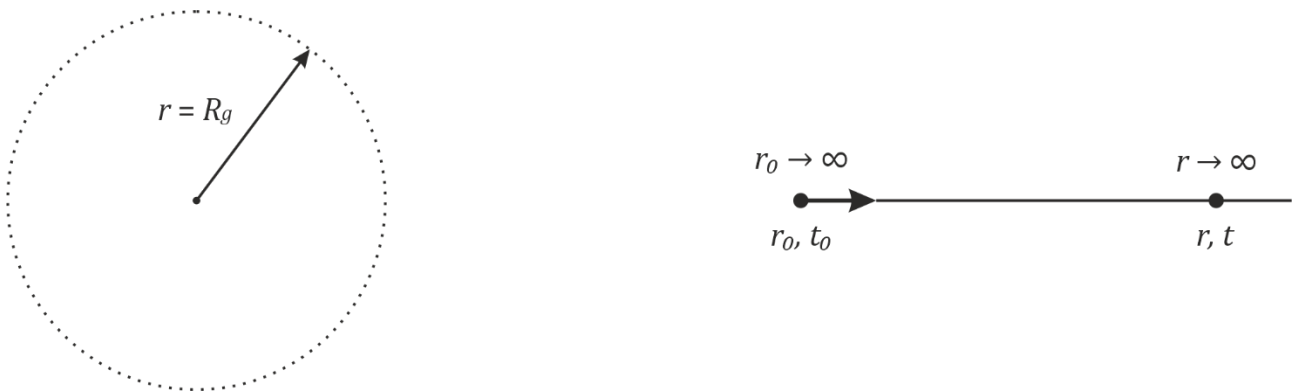
$$-c\Delta t = \lim_{r \rightarrow R_g} \left[(r - r_0) + R_g \ln \frac{r - R_g}{r_0 - R_g} \right]$$

$$-c\Delta t = (R_g - r_0) + R_g \lim_{r \rightarrow R_g} \left[\ln \frac{r - R_g}{r_0 - R_g} \right]$$

$$\Delta t \rightarrow \infty$$

Zdá se, že z hlediska vnějšího pozorovatele bude trvat paprsku blížící se k *horizontu* nekonečně dlouhou dobu, než jej dosáhne. Samozřejmě jakýkoliv hmotný objekt se bude pohybovat k *horizontu* podsvětelnou rychlostí, a tudíž mu to také bude trvat nekonečně dlouhou dobu, než dosáhne *horizontu*. Ovšem pozorovatel letící směrem k *horizontu* tímto *horizontem* projde v konečném čase. Jedná se v podstatě o extrémní *dilataci času*, kdy v jedné soustavě vyjde konečný časový interval a v jiné nekonečný. Skutečnost je ale díky kvantovým jevům trochu jiná. Se zmenšující se vzdáleností od horizontu s časem exponenciálně klesá intenzita toho, co pozoruje vnější pozorovatel. V relativně krátké době se tedy dostaneme až k poslednímu kvantovému skoku, kdy obdržíme poslední foton. Takže přestože nám z obecné relativity vychází, že $\Delta t \rightarrow \infty$, v reálném světě se díky kvantování a exponenciálnímu poklesu intenzity jedná o relativně malý časový interval, než obdržíme poslední kvantum a objekt nám zmizí. Navíc u skutečných *černých děr* je to ještě složitější, protože jsou rotující.

3.10.2 Příklad: Pohyb paprsku z bodu r_0 směrem od horizontu



Pro $r_0, r \rightarrow \infty$ dostáváme z druhého vyjádření výrazu (18):

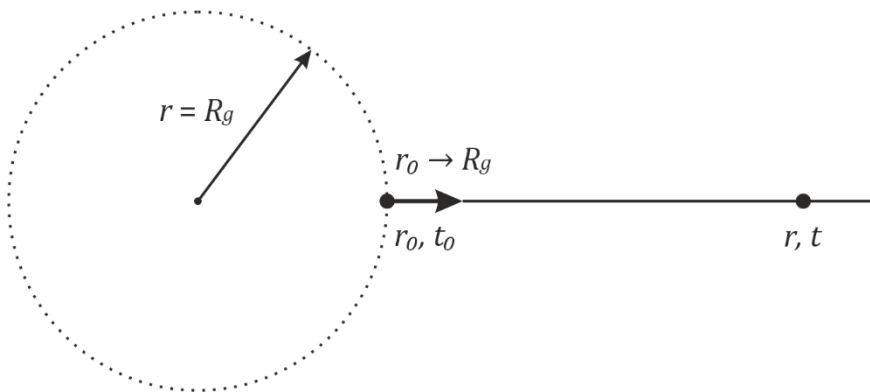
$$r = r_0 + c(t - t_0) - R_g \ln \frac{r - R_g}{r_0 - R_g}$$

$$r = r_0 + c\Delta t - \lim_{r_0, r \rightarrow \infty} \left(R_g \ln \frac{r - R_g}{r_0 - R_g} \right) \quad \text{kde} \quad \lim_{r_0, r \rightarrow \infty} \left(R_g \ln \frac{r - R_g}{r_0 - R_g} \right) = 0$$

$$r = r_0 + c\Delta t$$

Pokud tedy budeme hodně daleko od objektu, dostaneme to, co očekáváme od Minkowského geometrie, což je to, že radiální vzdálenost je počáteční vzdálenost plus rychlost šíření světla krát časový interval. Neboli dostáváme běžnou Newtonovskou fyziku.

3.10.3 Příklad: Pohyb paprsku z horizontu směrem od horizontu



Opět použijeme první vyjádření výrazu (18):

$$+c(t - t_0) = (r - r_0) + R_g \ln \frac{r - R_g}{r_0 - R_g}$$

$$\lim_{r_0 \rightarrow R_g^+} [c(t - t_0)] = \lim_{r_0 \rightarrow R_g^+} \left[(r - r_0) + R_g \ln \frac{r - R_g}{r_0 - R_g} \right]$$

$$c\Delta t = (r - R_g) + R_g \lim_{r_0 \rightarrow R_g^+} \ln \frac{r - R_g}{r_0 - R_g}$$

$$\Delta t \rightarrow \infty$$

Pokud tedy budu posílat světlo ze Schwarzschildova *horizontu* $r_0 = R_g$, nemělo by nikdy dojít, což je pochopitelné. Pokud ale vyšlu světlo kdekoliv nad *horizontem* $r_0 > R_g$, pak už se bude jednat o konečný čas.

3.11 Obecné informace a pozorování (část 2)

Skutečné *černé díry* jsou samozřejmě rotující. Kolem nich se vytváří oblasti jako je *plyno-prachový torus*, což jsou částice, které se vnitřním třením příliš moc nezahřívají. Ovšem tyto částice padají po spirále směrem k centru, a čím jsou blíže, tím více dochází vnitřním třením k zahřívání, až nakonec dojde k ionizaci této látky, která se pak stane plazmatem. Takže ve vnitřní části *plyno-prachového torusu* se nachází *plazmový torus*, který je už nesmírně žhavý a vyzařuje. Paradoxně tedy samotná *černá díra*, která nemůže žádné světlo uvolnit, má ve vnitřní části torusu *akreční disk* nebo *plazmový torus*, který velmi intenzivně svítí tak, že jsou to často nejzářivější objekty ve vesmíru. *Černá díra* samozřejmě nezáří. Vše se děje nad *horizontem*. Je tedy zdrojem intenzivního tepelného záření, které často jde až do rentgenové oblasti. Tím, že se jedná o *plazmatický akreční disk*, což jsou obíhající nabitě částice, generují magnetické pole. *Černé díry* jsou zdroje velmi silných magnetických polí vznikající v těsném okolí, která se transformují do takzvaných magnetických trubic. Uvnitř těchto trubic je látka, která je velmi intenzivně urychlována směrem ven. Čili ne všechny částice dopadnou dovnitř, ale část je odkloněna a urychlena v těchto výtrscích ve směru osy rotace na velmi vysoké rychlosti blízké rychlosti světla. Tyto nabitě částice se tedy vysokou rychlostí pohybují v magnetickém poli, což znamená, že se pohybují po šroubovicích a generují rovněž synchrotronní záření *elektronů* a dalších

nabitých částic vycházející z výtrysku. Magnetické pole samozřejmě se vzdáleností postupně slábne a částice, které jsou urychleny na rychlost blízkou rychlosti světla, postupně ztrácí tuto rychlost, protože jsou zpomalovány okolním mezihvězdným prostředím až na velmi nízké energie. Výsledkem je ochlazení těchto výtrysků a vytváření chladných rádiových skvrn. Toto je typická charakteristika *černé díry* bez ohledu na její hmotnost.

3.12 Obecný pohyb

Opět vyjdeme ze *Schwarzschildovy metriky* (14):

$$ds_{LIS}^2 = -c^2 \left(1 - \frac{R_g}{r_s}\right) dt_s^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{R_g}{r_s}\right)} dr_s^2 + r_s^2 d\theta^2 + r_s^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

Vzhledem k tomu, že se jedná o obecný pohyb, potřebujeme nyní rovněž i úhlové proměnné. Jak víme, Newtonovu pohybovou rovnici můžeme vyjádřit také ve tvaru

$$\frac{d}{dt} p_k = F_k$$

nebo v podobě *Lagrangeovy rovnice II. druhu*:

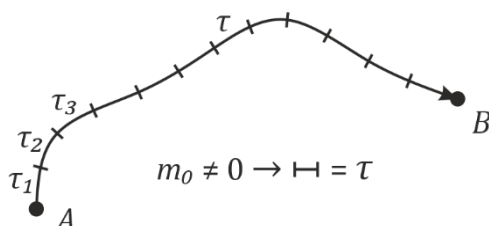
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \equiv p_k \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial q_k} \equiv F_k$$

Lagrangeovy rovnice mají například výhodu v tom, že fungují v křivočarých systémech, jsou nezávislé na volbě souřadnic a podobně. Lagrangeova funkce L by měla být obecně invariantní veličinou, která je ve všech soustavách stejná. My právě takovou veličinu máme, což je ds_{LIS} . Takže *lagrangián* (*kinetický potenciál* systému) jde konstruovat pomocí ds_{LIS} . Pro naše účely v relativitě je naprosto nevhodné používat derivaci podle času, poněvadž čas je jednou z proměnných časoprostoru (t, x, y, z) . Čili musíme zvolit nějakou jinou parametrizaci rovnic. Udělejme obecnou parametrizaci:

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad ; \quad \bullet \equiv \frac{d}{d\lambda}$$

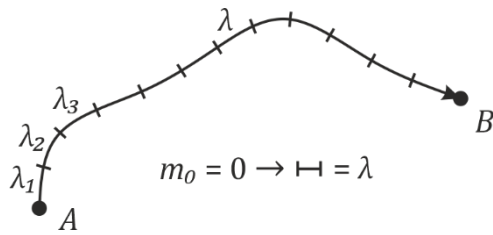
Jinými slovy, v běžné mechanice používáme k parametrizaci čas t , ovšem zde by to nebylo vhodné, protože t je jednou ze souřadnic časoprostoru (závislá proměnná). Dále uvažujeme podle toho, zda máme hmotnou nebo nehmotnou částici:

- (a) Máme-li hmotnou částici ($m_0 \neq 0$), pak vhodným parametrem bude *vlastní čas* τ . Čili platí, že čas je funkcí *vlastního času* - $t(\tau)$, radiální vzdálenost je funkcí *vlastního času* - $r(\tau)$, úhlové vzdálenosti budou funkcí *vlastního času* - $\varphi(\tau)$, $\theta(\tau)$. Čili tuto čtveřici proměnných musíme poznat neboli určit, jak plyne čas t , jak se mění radiální vzdálenost r a úhly φ , θ při pohybu částice. Je to částice, která se pohybuje kolem nějakého centra, které pokrývá svět kolem sebe:



- (b) Budeme-li mít nehmotnou částici ($m_0 = 0$), například *foton*, tak nelze z pochopitelných důvodů zavést *vlastní čas* (při rychlosti světla čas neplyne). Musíme vzít jiný parametr. Muže jím být

například *vlastní délka* λ . Takže čas bude funkcí *vlastní délky* - $t(\lambda)$, radiální vzdálenost bude funkcí *vlastní délky* - $r(\lambda)$, úhlové vzdálenosti budou funkcí *vlastní délky* - $\varphi(\lambda)$, $\theta(\lambda)$:



Jak víme, *interval* ds_{LIS} ve výrazu pro *Schwarzschildovu metriku* (14) je ve všech *lokálních inerciálních soustavách* stejný. Při změně rychlosti je částice vždy na okamžik v klidu vůči nějaké *lokální inerciální soustavě*, kde platí speciální relativita; to znamená, že vždy lze najít *lokální inerciální soustavu*, vůči které se částice na okamžik nepohybuje. Takže prostorová část bude rovna nule a časová část bude:

$$-c^2 d\tau^2 \equiv ds_{LIS}^2 = -c^2 \left(1 - \frac{R_g}{r_S}\right) dt_S^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{R_g}{r_S}\right)} dr_S^2 + r_S^2 d\theta^2 + r_S^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

Levá strana rovnice vyjadřuje *interval* v *lokální inerciální soustavě*, pravá strana rovnice vyjadřuje *interval* ve *Schwarzschildově metrice*. Vidíme tedy převod mezi časem t_S plynoucím v laboratoři a *vlastním časem* τ částice v *lokální inerciální soustavě*. Protože víme, že u světla je $ds_{LIS}^2 = 0$, pak nemůžeme na rozdíl od hmotné částice *vlastní čas* zavést.

Pro *Schwarzschildovu metriku* za Lagrangeovu funkci zvolíme *invariant*, a tady se přímo podbízí ds_{LIS}^2 , který ovšem musíme něčím vydělit. Čas dt_S^2 můžeme vyloučit, protože se transformuje (je různý v různých *inerciálních soustavách*); *vlastní čas* $d\tau^2$ můžeme použít pouze pro hmotný objekt nikoli pro světlo. Uděláme-li to obecně podle $d\lambda^2$, pak máme *lagrangián* L jak pro světlo, tak pro jakoukoli jinou částici. U světla ponecháme λ jako *vlastní délku*, u hmotných částic ji nahradíme *vlastním časem* τ :

$$L = \frac{ds_{LIS}^2}{d\lambda^2}$$

Pak Lagrangeova funkce pro obecný pohyb ve *Schwarzschildově metrice* bude:

$$L = \frac{ds_{LIS}^2}{d\lambda^2} = -c^2 \left(1 - \frac{R_g}{r_S}\right) \frac{dt_S^2}{d\lambda^2} + \frac{1}{\left(1 - \frac{R_g}{r_S}\right)} \frac{dr_S^2}{d\lambda^2} + r_S^2 \frac{d\theta^2}{d\lambda^2} + r_S^2 \sin^2 \theta \frac{d\varphi^2}{d\lambda^2}$$

$$L = \frac{ds_{LIS}^2}{d\lambda^2} = -c^2 \left(1 - \frac{R_g}{r_S}\right) \dot{t}_S^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{R_g}{r_S}\right)} \dot{r}_S^2 + r_S^2 \dot{\theta}^2 + r_S^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \quad ; \quad \bullet \equiv \frac{d}{d\lambda} \quad (19)$$

3.12.1 Příklad: Foton (parametrizace vlastní délkou)

Nyní prozkoumejme pohyb světla kolem *černé díry*. Pro jednoduchost sledujme pohyb v rovině (x, y) , což znamená, že $\theta = \pi/2$. Budu tedy mít pouze souřadnice t_S, r_S, φ . Lagrangeova funkce (19) se nám tímto zredukuje na tvar:

$$L = -c^2 \left(1 - \frac{R_g}{r_S}\right) \dot{t}_S^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{R_g}{r_S}\right)} \dot{r}_S^2 + r_S^2 \dot{\varphi}^2$$

Hledáme, jak plyne $t_S(\lambda), r_S(\lambda), \varphi(\lambda)$. Napišme Lagrangeovy rovnice:

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad ; \quad q_k = t_S, r_S, \varphi$$

$$(1) \quad \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{t}_S} - \frac{\partial L}{\partial t_S} = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\lambda} \left[-2c^2 \left(1 - \frac{R_g}{r_S} \right) \dot{t}_S \right] = 0 \Rightarrow \left(1 - \frac{R_g}{r_S} \right) \dot{t}_S = k$$

$$(2) \quad \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_S} - \frac{\partial L}{\partial r_S} = 0 \Rightarrow \text{Zde je výpočet složitější, proto rovnici nahradíme rovnicí } ds_{LIS}^2 = 0$$

$$(3) \quad \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\lambda} (2r_S^2 \dot{\varphi}) = 0 \Rightarrow r_S^2 \dot{\varphi} = b$$

Máme tedy 3 rovnice o 3 neznámých, které vyřešíme:

$$(1) \quad \left(1 - \frac{R_g}{r_S} \right) \dot{t}_S = k$$

$$(2) \quad -c^2 \left(1 - \frac{R_g}{r_S} \right) dt_S^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{R_g}{r_S} \right)} dr_S^2 + r_S^2 d\varphi^2 = 0$$

$$(3) \quad r_S^2 \dot{\varphi} = b$$

Protože se jedná o světlo, nemůžeme použít *vlastní čas*. Proto parametrizujeme podle *vlastní délky* $d\lambda$:

$$(1) \quad \dot{t}_S = \frac{k}{\left(1 - \frac{R_g}{r_S} \right)}$$

$$(2) \quad -c^2 \left(1 - \frac{R_g}{r_S} \right) \dot{t}_S^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{R_g}{r_S} \right)} \dot{r}_S^2 + r_S^2 \dot{\varphi}^2 = 0$$

$$(3) \quad \dot{\varphi} = \frac{b}{r_S^2}$$

Pokud by nás zajímala trajektorie *fotonu*, pak tyto 3 rovnice musíme řešit numericky. Nás ale zajímá pouze kruhová orbita fotonu ($r_S = \text{konst}$), proto rovnice (1) a (3) dosadíme do rovnice (2):

$$-c^2 \left(1 - \frac{R_g}{r_S} \right) \left[\frac{k}{\left(1 - \frac{R_g}{r_S} \right)} \right]^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{R_g}{r_S} \right)} \dot{r}_S^2 + r_S^2 \left[\frac{b}{r_S^2} \right]^2 = 0$$

$$-c^2 \left(1 - \frac{R_g}{r_S} \right) \frac{k^2}{\left(1 - \frac{R_g}{r_S} \right)^2} + \frac{1}{\left(1 - \frac{R_g}{r_S} \right)} \dot{r}_S^2 + \frac{b^2}{r_S^2} = 0$$

$$-c^2 \frac{k^2}{\left(1 - \frac{R_g}{r_S} \right)} + \frac{1}{\left(1 - \frac{R_g}{r_S} \right)} \dot{r}_S^2 + \frac{b^2}{r_S^2} = 0$$

$$-c^2 k^2 + \dot{r}_S^2 + \frac{b^2}{r_S^2} \left(1 - \frac{R_g}{r_S} \right) = 0$$

$$\dot{r}_S^2 + \frac{b^2}{r_S^2} \left(1 - \frac{R_g}{r_S} \right) = c^2 k^2 \quad (20)$$

Tato rovnice hodně připomíná zákon zachování energie. V prvním členu vidíme kvadrát rychlosti \dot{r}_S^2 , což je úměrné *kinetické energii* W_k . Druhý člen je pouze funkcí polohy, což nějak připomíná *potenciální energii*. Nazveme jej *efektivním potenciálem* $V_{ef}(r_S)$:

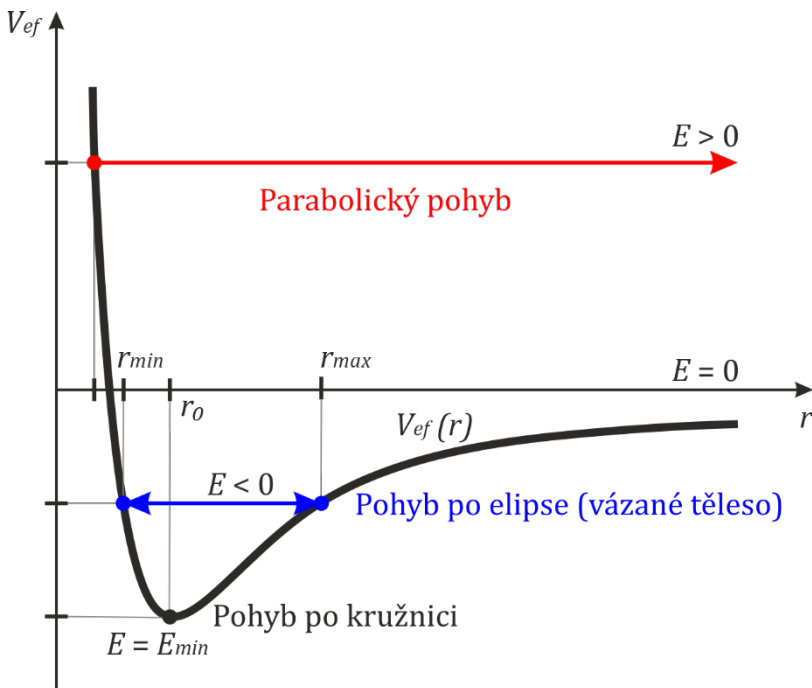
$$V_{ef}(r_S) \equiv \frac{b^2}{r_S^2} \left(1 - \frac{R_g}{r_S}\right) = \frac{b^2}{r_S^2} - \frac{b^2 R_g}{r_S^3} \quad (21)$$

Čili kinetický člen popisující pohyb plus potenciální člen popisující polohu se rovná konstantě. Je to nějaký zobecněný zákon zachování energie pro pohyb fotonu ($ds_{LIS}^2 = 0$) kolem *černé díry*. Pokud z rovnice (20) vyjádříme \dot{r}_S , dostaneme:

$$\dot{r}_S = \sqrt{c^2 k^2 - V_{ef}(r_S)} \quad ; \quad V_{ef}(r_S) \leq c^2 k^2$$

Poznamenejme, že při popisu oběhu Země kolem Slunce se také zavádí *efektivní potenciál sil*. Jedna část *efektivního potenciálu* je od odstředivé síly a druhá od gravitace. S gravitační potenciální energií jsme se již setkali ve tvaru $-GmM/r_S$ a je tedy nepřímě úměrná r_S . Druhá část je odstředivá a je nepřímě úměrná r_S^2 . Celý vztah pro Newtonovský *efektivní potenciál* a jeho grafická reprezentace vypadá takto:

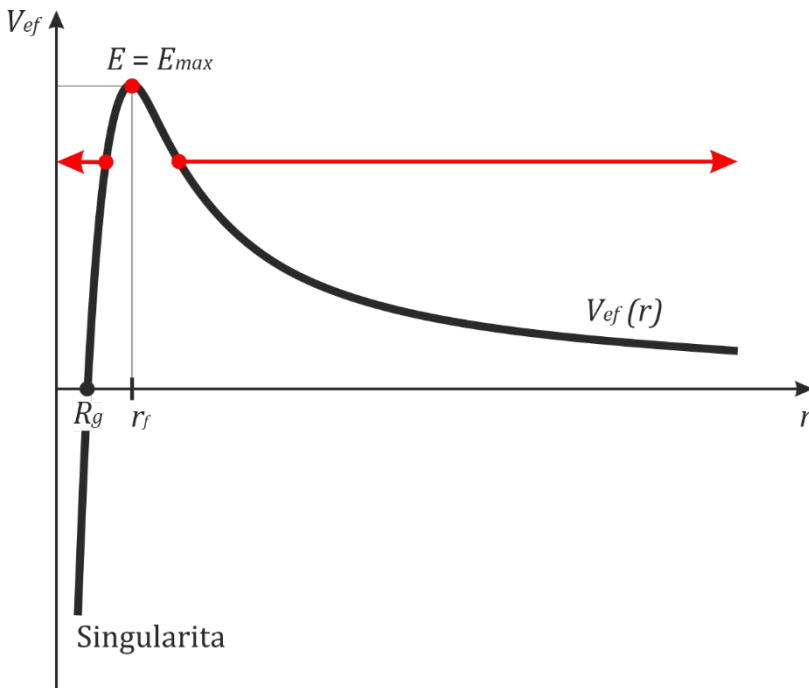
$$V_{ef}(r_S) = V_{gravitační}(r_S) + V_{odstředivý}(r_S) = -G \frac{mM}{r_S} + \frac{l^2}{2mr_S^2}$$



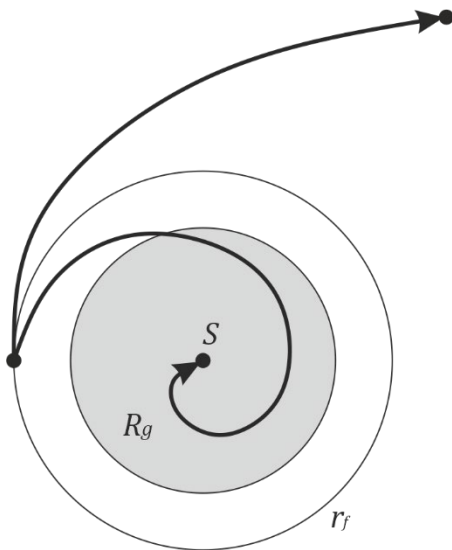
Platí, že pohyb se může konat pouze nad křivkou potenciálu. Má-li těleso kladnou energii ($E > 0$), může se pohybovat pouze nad křivkou do nekonečna. Je to například hyperbolický pohyb ve Sluneční soustavě. Těleso má nejmenší bod přiblížení a pak odletí do nekonečna. Má-li těleso nulovou energii ($E = 0$), pohybuje se po parabole. Má-li těleso zápornou energii větší než E_{min} ($0 > E > E_{min}$), pak je vázané a pohybuje se mezi r_{min} a r_{max} , což je pohyb po elipse. Má-li těleso minimální energii pro pohyb ($E = E_{min}$) pohybuje se po kružnici ve vzdálenosti r_0 . Pro energii tělesa menší než minimální ($E < E_{min}$) není pohyb možný.

Nyní jsme v podobné situaci. Jenom průběh *efektivního potenciálu* je trochu jiný. Ale opět plyne, že tam, kde je extrém, je kruhová orbita. Chceme-li zjistit kruhovou orbitu *fotonu*, což je zajímavé, pak

musíme najít derivaci *efektivního potenciálu* a položit ji rovnu nule. Ovšem průběh potenciálu bude na základě výrazu (21):



Jestliže se pohyb může konat pouze nad křivkou průběhu *efektivního potenciálu*, pak se může konat nalevo i napravo od vrcholu křivky. Pokud, se částice pohybuje nalevo, spadne do singularity. Pohybuje-li se napravo, odletí do nekonečna. Částice se rovněž může pohybovat na kruhové orbitě ve vzdálenosti r_f , ale tato dráha není stabilní. Stačí menší porucha, a buď částice spadne do singularity, nebo odletí do nekonečna:



Naším úkolem je spočítat kruhovou orbitu r_f *fotonu*, na což stačí najít extrém průběhu *efektivního potenciálu*. Čili *efektivní potenciál* derivovat podle r_s a výsledek položit rovno nule. Vyjdeme z výrazu (21) pro *efektivní potenciál*:

$$V_{ef}(r_s) \equiv \frac{b^2}{r_s^2} \left(1 - \frac{R_g}{r_s}\right) = \frac{b^2}{r_s^2} - \frac{b^2 R_g}{r_s^3}$$

$$\frac{dV_{ef}(r_s)}{dr_s} = 0$$

$$\frac{-2b^2}{r_s^3} + \frac{3b^2 R_g}{r_s^4} = 0$$

$$-2r_s b^2 + 3b^2 R_g = 0$$

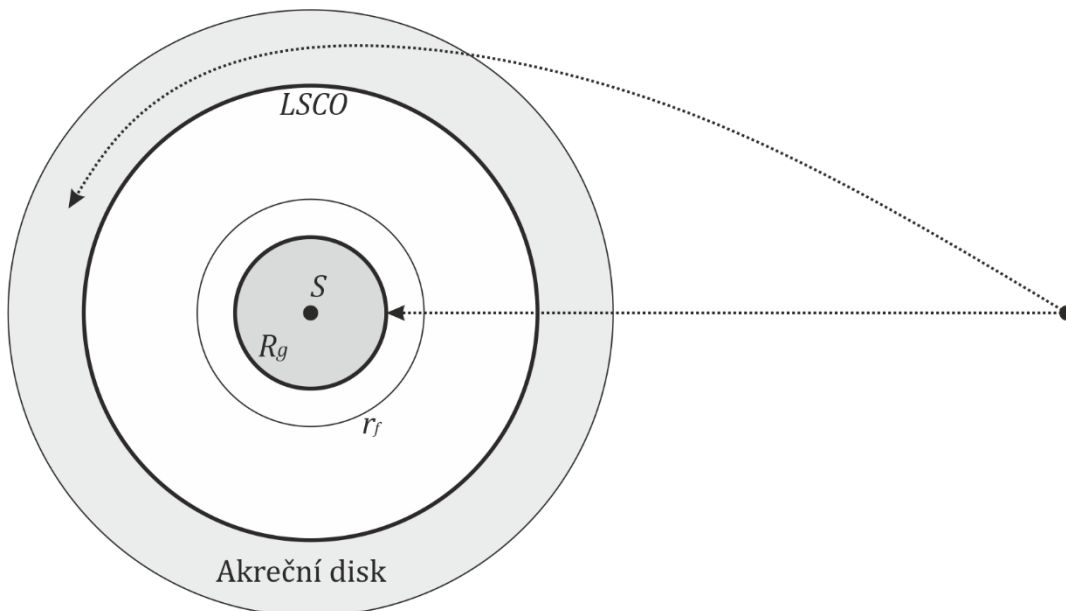
$$-2r_s + 3R_g = 0$$

$$r_f = r_s = \frac{3}{2} R_g \quad (22)$$

Výsledek tedy je, že kruhová orbita *fotonů* r_f se nachází ve vzdálenosti 1,5 násobku *Schwarzschildova poloměru*. Jak už bylo zmíněno, dráha je nestabilní, a proto po ní *fotony* nemohou obíhat donekonečna.

3.12.2 Příklad: Hmotná částice (parametrizace vlastním časem)

Když budeme daleko od *černé díry* a něco do ní radiálně hodíme, pak to tam nepochybně spadne vždy. Pokud to hodíme šikmo vhodnou rychlostí, tak to bude obíhat po stabilní kruhové dráze. V jisté menší vzdálenosti ovšem existuje *poslední stabilní kruhová orbita* hmotných částic, za níž už kruhové orbity nejsou stabilní, částice se na nich neudrží a nevyhnutelně padají po spirále do *černé díry*. Nás zajímá tato *poslední stabilní kruhová orbita* (*Last Stable Circular Orbit, LSCO*), protože je to vlastně vnitřní část *akrečního disku*:



Nyní prozkoumejme pohyb hmotné částice kolem *černé díry*. Pro jednoduchost sledujme pohyb v rovině (x, y) , což znamená, že $\theta = \pi/2$. Budu tedy mít pouze souřadnice t, r, φ . Lagrangeova funkce se nám tímto opět zredukuje na tvar:

$$L = -c^2 \left(1 - \frac{R_g}{r_s}\right) \dot{t}_s^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{R_g}{r_s}\right)} \dot{r}_s^2 + r_s^2 \dot{\varphi}^2$$

Hledáme, jak plyne $t(\tau), r(\tau), \varphi(\tau)$. Napišme Lagrangeovy rovnice:

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad ; \quad q_k = t_s, r_s, \varphi$$

$$(1) \quad \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{t}_s} - \frac{\partial L}{\partial t_s} = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\tau} \left[-2c^2 \left(1 - \frac{R_g}{r_s}\right) \dot{t}_s \right] = 0 \Rightarrow \left(1 - \frac{R_g}{r_s}\right) \dot{t}_s = k$$

$$(2) \quad \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_S} - \frac{\partial L}{\partial r_S} = 0 \Rightarrow \text{Zde je výpočet složitější, proto rovnici nahradíme rovnicí } ds_{LIS}^2 = -c^2 d\tau^2$$

$$(3) \quad \frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\tau} (2r_S^2 \dot{\varphi}) = 0 \Rightarrow r_S^2 \dot{\varphi} = b$$

Máme tedy 3 rovnice o 3 neznámých, které vyřešíme:

$$(1) \quad \left(1 - \frac{R_g}{r_S}\right) \dot{t}_S = k$$

$$(2) \quad -c^2 \left(1 - \frac{R_g}{r_S}\right) dt_S^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{R_g}{r_S}\right)} dr_S^2 + r_S^2 d\varphi^2 = -c^2 d\tau^2$$

$$(3) \quad r_S^2 \dot{\varphi} = b$$

Protože se jedná o hmotnou částici, můžeme použít jako parametr *vlastní čas* $d\tau$:

$$(1) \quad \dot{t}_S = \frac{k}{\left(1 - \frac{R_g}{r_S}\right)}$$

$$(2) \quad -c^2 \left(1 - \frac{R_g}{r_S}\right) \dot{t}_S^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{R_g}{r_S}\right)} \dot{r}_S^2 + r_S^2 \dot{\varphi}^2 = -c^2$$

$$(3) \quad \dot{\varphi} = \frac{b}{r_S^2}$$

Pokud by nás zajímala trajektorie částice, pak tyto 3 rovnice musíme řešit numericky. Nás ale zajímá pouze kruhová orbita ($r_S = \text{konst}$), proto rovnice (1) a (3) dosadíme do rovnice (2):

$$-c^2 \left(1 - \frac{R_g}{r_S}\right) \left[\frac{k}{\left(1 - \frac{R_g}{r_S}\right)} \right]^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{R_g}{r_S}\right)} \dot{r}_S^2 + r_S^2 \left[\frac{b}{r_S^2} \right]^2 = -c^2$$

$$-c^2 \left(1 - \frac{R_g}{r_S}\right) \frac{k^2}{\left(1 - \frac{R_g}{r_S}\right)^2} + \frac{1}{\left(1 - \frac{R_g}{r_S}\right)} \dot{r}_S^2 + \frac{b^2}{r_S^2} = -c^2$$

$$-c^2 \frac{k^2}{\left(1 - \frac{R_g}{r_S}\right)} + \frac{1}{\left(1 - \frac{R_g}{r_S}\right)} \dot{r}_S^2 + \frac{b^2}{r_S^2} = -c^2$$

$$-c^2 k^2 + \dot{r}_S^2 + \frac{b^2}{r_S^2} \left(1 - \frac{R_g}{r_S}\right) = -c^2 \left(1 - \frac{R_g}{r_S}\right)$$

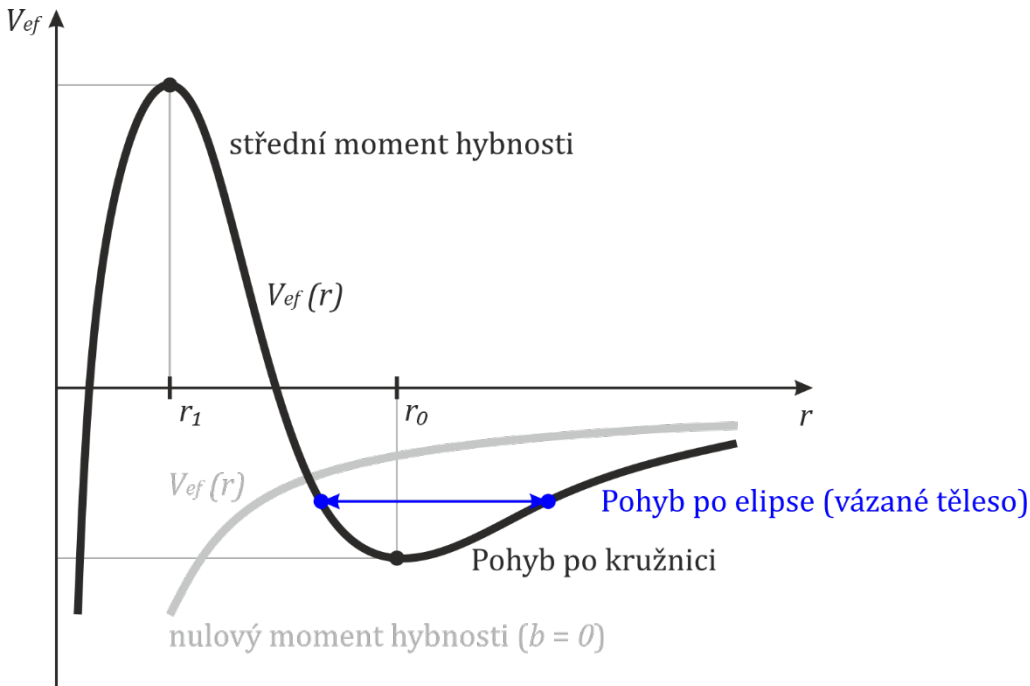
$$\dot{r}_S^2 + \frac{b^2}{r_S^2} - \frac{b^2 R_g}{r_S^3} - \frac{c^2 R_g}{r_S} = c^2 k^2 - c^2$$

$$\dot{r}_S^2 - \frac{c^2 R_g}{r_S} + \frac{b^2}{r_S^2} - \frac{b^2 R_g}{r_S^3} = c^2 (k^2 - 1) \quad (23)$$

Dostali jsme rovnici pro pohyb částic s nenulovým momentem hybnosti $r_S^2 \dot{\varphi} = b$. Rovnice (23) opět připomíná zákon zachování energie. V prvním členu vidíme kvadrát rychlosti \dot{r}_S^2 , což je úměrné *kinetické energii* W_k . Druhý, třetí a čtvrtý člen tvoří *efektivní potenciál* $V_{ef}(r_S)$:

$$V_{ef}(r_S) \equiv -\frac{c^2 R_g}{r_S} + \frac{b^2}{r_S^2} - \frac{b^2 R_g}{r_S^3} \quad (24)$$

První člen *efektivního potenciálu* odpovídá gravitační potenciální energii $-GmM/r_S$ (jak víme, pohyb těles se uskutečňuje automaticky k nižší hodnotě potenciální energie, čili k centrálnímu tělesu); druhý člen b^2/r_S^2 je potenciálem odstředivých sil (je vidět, že souvisí s momentem hybnosti b^2); třetí člen $b^2 R_g/r_S^3$ je úplně nový a souvisí se zakřiveným časoprostorem kolem centrálního tělesa (v klasické mechanice nemá analogii). Takže pro hmotnou částici, má *efektivní potenciál* členy úměrné $-1/r_S$, $1/r_S^2$, $-1/r_S^3$. Je zřejmé, že průběh *efektivního potenciálu* (24) bude pro různá b vypadat různě:



Pro vysoké momenty hybnosti neexistuje žádné minimum a částice odletí do nekonečna. Pro nulový moment hybnosti ($b = 0$) platí spodní šedá křivka, protože zůstane pouze první člen s $-1/r_S$, což odpovídá radiálnímu směru pádu do *černé díry*. Pro střední momenty hybnosti platí horní černá křivka se stabilní kruhovou orbitou. Průběh potenciálu má tedy dva extrémy (maximum a minimum). Částice v r_1 se nachází na nestabilní kruhové orbitě; částice v r_0 se nachází na stabilní kruhové orbitě; z obrázku je vidět, že se částice může nacházet také na stabilní eliptické orbitě tak, jak je to běžné. Nyní spočítejme oba tyto extrémy v r_0 a r_1 tak, že derivujeme efektivní potenciál (24) a tuto derivaci položíme rovnu nule:

$$V_{ef}(r_S) \equiv -\frac{c^2 R_g}{r_S} + \frac{b^2}{r_S^2} - \frac{b^2 R_g}{r_S^3}$$

$$\frac{dV_{ef}(r_S)}{dr_S} = 0$$

$$\frac{c^2 R_g}{r_S^2} - 2 \frac{b^2}{r_S^3} + 3 \frac{b^2 R_g}{r_S^4} = 0$$

$$c^2 R_g r_S^2 - 2b^2 r_S + 3b^2 R_g = 0 \quad ; \quad A = c^2 R_g; B = -2b^2; C = 3b^2 R_g$$

$$r_{S01} = \frac{-B \pm \sqrt{D}}{2A} = \frac{2b^2 \pm \sqrt{(-2b^2)^2 - 4 \cdot c^2 R_g \cdot 3b^2 R_g}}{2 \cdot c^2 R_g} = \frac{2b^2 \pm \sqrt{4b^4 - 4 \cdot c^2 R_g \cdot 3b^2 R_g}}{2 \cdot c^2 R_g}$$

$$= \frac{b^2 \pm \sqrt{b^4 - 3b^2 c^2 R_g^2}}{c^2 R_g}$$

Budu-li snižovat moment hybnosti b částice, křivka průběhu potenciálu se bude zplošťovat a poloměry r_0 a r_1 se budou k sobě přibližovat, až jednou oba poloměry splynou ($D = 0 \Rightarrow r_0 = r_1$). Pro hybnost pak dostáváme:

$$b^4 - 3b^2 c^2 R_g^2 = 0$$

$$b^2 = 3c^2 R_g^2 \quad (25)$$

Pro vzdálenost od centra potom dostáváme:

$$r_0 = r_1 = r_{s01} = \frac{b^2}{c^2 R_g} = \frac{3c^2 R_g^2}{c^2 R_g} = 3R_g \quad (26)$$

Poslední stabilní kruhová orbita hmotných částic (vnitřní část akrečního disku) se nachází ve vzdálenosti 3 násobku *Schwarzschildova poloměru*.

3.13 Obecné informace a pozorování (část 3)

V roce 1992 našel Hubbleův dalekohled několik *černých děr* v centrech galaxií, což způsobilo velký poprask, protože do té doby byly známy pouze hvězdné *černé díry*. Například *černá díra* v eliptické galaxii NGC4261 nacházející se v souhvězdí Panny je vzdálena 100 milionů světelných let, má hmotnost 400 milionů hmotností Slunce, hmotnost akrečního disku je 100 tisíc hmotností Slunce, délka výtrysků 88 tisíc světelných let, průměr samotné *černé díry* 60 astronomických jednotek, průměr disku 800 světelných let. Dnes víme, že naprostá většina galaxií má v centru obří černou díru. Hmotnosti galaktických černých děr se pohybují řádově od milionů po miliardy Sluncí. Obecně dělíme *černé díry* na hvězdné, galaktické a středních hmotností. Od roku 2015 díky objevu gravitačních vln detekujeme *černé díry* středních hmotností, které vznikají postupným slučováním menších *černých děr*.

Některé další jevy týkající se *Schwarzschildovy metriky*:

- (1) Gravitační *červený posuv*, který je způsoben tím, že světlo vzdalující se od hmotného tělesa ztrácí energii, což se projevuje prodloužením jeho vlnové délky. Platí, že *potenciální energie* W_p plus energie *fotonu* E_ν je konstantní ($W_p + E_\nu = konst$), což znamená, že pokud *potenciální energie* roste, pak energie *fotonu* musí klesat a klesá tak, že se prodlužuje jeho vlnová délka.
- (2) Gravitační ohyb světelného paprsku letící kolem hmotného objektu, což se projevuje například tím, že hvězdu na obloze vidíme na jiném místě, než ve skutečnosti je.
- (3) Gravitační čočky, které rovněž předpověděla obecná relativita.
- (4) Stáčení *pericentra*. Pokud se ve *Schwarzschildově metrice* bude pohybovat těleso ve velké vzdálenosti od centrálního tělesa, pak se bude pohybovat po elipse. Pokud se ovšem bude pohybovat blíž kolem velmi hmotného centra, pak se eliptická dráha obíhajícího tělesa stáčí, což Newtonovská teorie nepředpovídá. Ve Sluneční soustavě tento efekt je největší pro Merkur (43 obloukových vteřin za století), protože je nejbližší zakřivení od Slunce. Je to sice velmi málo, ale je to měřitelné a bylo to zjištěno ještě dlouho před objevem obecné relativity. Dnes jsou známé systémy například podvojně neutronové hvězdy, kde stáčení činí až 17 stupňů za rok.

4. EXPANDUJÍCÍ VESMÍR

4.1 Fridmanova metrika

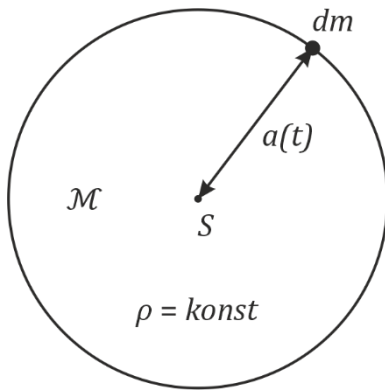
Alexandr Fridman (1888 - 1925) byl ruský fyzik, matematik a meteorolog. V roce 1922 odvodil a vydává metriku expandujícího vesmíru, který je vyplněný konstantní hustotou nějakého média bez jakékoli struktury, kde klíčovou záležitostí je *expanzní funkce*, která „nafukuje“ vesmír. Je to druhý nejjednodušší příklad vesmíru s konstantní hustotou - homogenní izotropní vesmír (ve všem bodech a směrech stejný). Médium může být obecně cokoliv (konstantní hustota látky, záření, vakuových fluktuací). Dnes se tato metrika označuje jako *FRWL*, což je odvozeno od jmen osob, kteří se jí zabývali. Je to samozřejmě Fridman, pak Robertson, který ji hluboce analyzoval, Walker a Lemaître. Tato metrika již nepracuje se souřadnicemi jako u *Schwarzschildovy metriky*, kde existoval statický vnější pozorovatel nacházející se vně objektu zakřivující časoprostor. V případě vesmíru, který má všude konstantní hustotu a my jsme součástí tohoto světa, se nacházíme v takzvaných *spolu se pohybujících souřadnicích* (*co-moving coordinates*). Je to souřadnicový systém, kterého jsme součástí. Pokud vesmír expanduje, pak se pohybujeme s touto expanzí. Tuto metriku nebudeme odvozovat z obecné relativity, protože je to poměrně komplikované a vyžaduje to znalost příslušných základních rovnic. Napišme tedy výsledek, jak ji odvodil Fridman:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[\frac{1}{1 - kr^2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right] ; \quad k = \frac{1}{R^2} \quad (27)$$

Poznáváme zde úhlové části ve sférických souřadnicích a *Gaussovu křivost* k . Takže prostorová část metriky se liší od sférických souřadnic pouze členem $1/(1 - kr^2)$. To znamená, že radiální vzdálenost je nějak měněna - kontrahována nebo natahována podle toho, jestli k je kladné nebo záporné (srovnejme výraz (27) s výrazem (9) pro metriku na povrchu koule). Dále je celá prostorová část metriky komprimována nebo expandována koeficientem $a^2(t)$, kde $a(t)$ je *expanzní funkce*. Je to bezrozměrné číslo, které buď komprimuje, nebo natahuje celou prostorovou část metriky. Pokud budeme mít $a(t) = 1$ (prostor není nijak komprimován nebo expandován) a $k = 0$ (radiální souřadnice není nijak pokrivená), dostáváme zpět *Minkowského metriku*. Vzhledem k tomu, že úhlové vzdálenosti většinou nebudeme potřebovat lze výraz (27) zapsat zkráceně, abychom nevypisoval jednotlivé úhly:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[\frac{1}{1 - kr^2} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \right] ; \quad k = \frac{1}{R^2} , \quad d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (28)$$

Rovnice obecné relativity dávají konkrétní předpis pro *expanzní funkci*. Zkusme jakési pseudoodvození podobné jako pro *Schwarzschildovu metriku*, kde jsme také nevycházeli z rovnic obecné relativity, ale provedli jsme odvození z klasické Newtonovské fyziky. Předpokládejme nekonečný homogenní izotropní vesmír a v něm dvě místa S (střed myšlené kulovité ohraničené části) a dm (hmotný element). Otázka je jaké síly budou působit na hmotný element dm . Jedna úvaha vede k závěru, že se v nekonečném homogenním izotropním vesmíru musí všechny síly vykompenzovat a výsledná síla působící na hmotný element dm je nulová. Druhá úvaha vede k závěru, že hmotný element dm bude přitahován ke středu S myšlené koule, protože v nekonečném homogenním izotropním vesmíru při „vyříznutí“ prostorové části nedoje k narušení rovnováhy sil (vesmír je nekonečný, síly se tedy kompenzují i při odstranění látky z myšlené části), a proto látka v myšlené kouli gravitačně přitahuje element dm ; jinými slovy, cokoliv vně myšlené koule na element nepůsobí, ale působí na něj pouze to, co je uvnitř myšlené koule. Jak je možné, že tyto dvě úvahy jsou v rozporu? Jedna se o nejednoznačnost Newtonovské fyziky, která byla odvozena pro konečné děje, nikoli pro nekonečný vesmír, kde selhává. Navíc to není ani polní teorie (signál se šíří nekonečnou rychlostí). Ale pokračujme v této úvaze i přesto, že není správná. Vyjdeme z rovnice pro zákon zachování energie (*kinetická energie plus potenciální energie* je konstantní):



$$\frac{1}{2}(dm)v^2 - G \frac{(dm)\mathcal{M}}{r} = \text{konst} \quad ; \quad \mathcal{M} = \rho V = \rho \frac{4}{3}\pi a^3 \quad , \quad a = r$$

Kde \mathcal{M} je hmotnost myšlené koule. Jak víme z *principu ekvivalence*, gravitační pohyb nezávisí na hmotnosti testovacího tělesa dm . Je tedy v obou členech stejný a můžeme jej zahrnout do konstanty na pravé straně rovnice. Pak můžeme psát:

$$\frac{1}{2}v^2 - G\rho \frac{4}{3}\pi a^2 = \text{konst}$$

$$v^2 - \frac{8}{3}\pi G\rho a^2 = \text{konst}$$

$$\dot{a}^2 - \frac{8}{3}\pi G\rho a^2 = \text{konst} \quad (29)$$

V klasické fyzice je to zákon zachování energie nějaké malé kuličky nacházející se na okraji myšlené koule s hmotou \mathcal{M} o konstantní hustotě ρ . Jak bylo zmíněno, tento zákon není zcela správně, protože Newtonovskou fyziku nemůžeme použít na nekonečný vesmír. Tato rovnice je ovšem zajímavá tím, že stejná vyjde z obecné relativity pro *expanzní funkci* $a(t)$. Pokud tedy budeme v Newtonovské fyzice, pak a je vzdálenost, pokud budeme v obecné relativitě, pak a má význam *expanzní funkce* $a(t)$, která nám koriguje prostorovou část metriky. Význam konstanty na pravé straně rovnice (29) je v Newtonovské fyzice energie na jednotku hmoty (E/m), v obecné relativitě vyjde ($-kc^2$), kde k je *Gaussova křivost*:

$$\dot{a}^2 - \frac{8}{3}\pi G\rho a^2 = \text{konst} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Newton:} \quad \text{Vzdálenost } a \text{ [m]} \quad , \quad \text{konst} = E/m \\ \text{Obecná relativita:} \quad \text{Expanzní funkce } a(t) \text{ [-]} \quad , \quad \text{konst} = -kc^2 \end{array} \right.$$

Takže Fridmanova-Einsteinova rovnice pro *expanzní funkci* ve *Fridmanově metrice* je:

$$\dot{a}^2 - \frac{8}{3}\pi G\rho a^2 = -kc^2 \quad (30)$$

Připomeňme, že korektní odvození této rovnice je z obecné relativity, nikoli tímto postupem. Co se týče rozměrů, je to v pořádku (a je samozřejmě bezrozměrné):

$$[s^{-2}] - [-] \cdot [m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}] \cdot [kg \cdot m^{-3}] \cdot [-] = [m^{-2}] \cdot [(m \cdot s^{-1})^2]$$

$$[s^{-2}] = [s^{-2}]$$

Budeme se tedy potýkat s těmito dvěma rovnicemi - *Fridmanovou metrikou* homogenního izotropního vesmíru vyplněného konstantní hustotou nějaké entity (28) a *expanzní funkcí* (30). Rovnice pro *expanzní funkci* má dva členy. První (\dot{a}^2) je kinetický člen a popisuje nárůst hodnoty s časem. Druhý člen včetně znaménka ($-8\pi G\rho a^2/3$) souvisí s gravitační kontrakcí, kdy se přitažlivá síla snaží zhroutit vesmír do sebe. První člen se tedy snaží vesmír „rozfouknout“ (je dán počátečními podmínkami), druhý člen se snaží vesmír smrštit.

Generace fyziků před Einsteinem si myslely, že vesmír je stacionární, což znamená, že nemění své rozměry. Když Albert Einstein vytvořil svou první variantu rovnic obecné relativity, tak se mu vesmír hroutil právě kvůli gravitaci:

$$G_{\mu\nu} = \alpha T_{\mu\nu} \quad ; \quad \mu, \nu \in (0,1,2,3)$$

Kde $G_{\mu\nu}$ je funkcí derivací metriky popisující zakřivení času a prostoru, $T_{\mu\nu}$ popisuje rozložení hmoty ve vesmíru. Rozložení látky ve vesmíru a jeho zakřivení je tedy ekvivalentní. Látka zakřivuje vesmír. Bez látky by vesmír nebyl zakřiven. Pokud bychom teoreticky odstranili veškerou hmotu, zůstal by plochý svět speciální relativity bez jakéhokoliv zakřivení (jestliže bude na pravé straně rovnice nula, pak existuje jediné triviální řešení, kterým je plochý svět speciální relativity). Rovnice vypadají nesmírně elegantně, ale samozřejmě, že $G_{\mu\nu}$ je složitou funkcí derivací metrického tenzoru a $T_{\mu\nu}$ je složitou funkcí rozložení látky ve vesmíru. Ovšem tato varianta rovnic z roku 1915 způsobovala kolaps vesmíru. Tak už v roce 1917 přidal Albert Einstein do těchto rovnic člen, který vesmír trochu „přifukoval“, aby dosáhl předpokládaného ustáleného stavu. Na levou stranu přidal člen $\Lambda_{g_{\mu\nu}}$ úměrný metrice, který měl pomoci vesmír stabilizovat:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda_{g_{\mu\nu}} = \alpha T_{\mu\nu} \quad ; \quad \mu, \nu \in (0,1,2,3)$$

Kde $\Lambda_{g_{\mu\nu}}$ je *kosmologická konstanta*, která tomu měla pomoci. Ale v roce 1922 udělal Fridman analýzu stability Einsteinova řešení a zjistil, že kompenzace členem $\Lambda_{g_{\mu\nu}}$ je nestabilní. Dosáhne sice jakési rovnováhy mezi expandující silou a gravitací, ale stačí jakákoli porucha a vesmír se buďto „rozfoukne“ nebo zkolabuje. Po kontrole výpočtu nakonec Einstein uznal tuto námitku jako opodstatněnou. V roce 1929, kdy bylo prokazatelně jasné na mnoha experimentech, že vesmír expanduje, Einstein tento člen vyloučil ze svých rovnic a prohlásil to za největší omyl svého života. Ovšem teprve až po mnoha letech, v roce 1998, se ukázalo, že vesmír expanduje zrychlenou expanzí. Zrychlená expanze ale není způsobená gravitací. Takže jsme *kosmologickou konstantu*, která vesmír „přifukuje“, zavedli znovu.

4.1.1 Příklad: Změna vlnové délky světla při průchodu vesmírem

Pokud vesmír podléhá *Fridmanově metrice* a expanduje nebo kolabuje, může být zajímavé zjistit, jak se takovým vesmírem šíří světlo. Pokud pošleme *foton* vesmírem, který pro $a^2(t) \neq 1$ buď expanduje, nebo kolabuje, pak lze ukázat, že světlo na tuto expanzi nebo kontrakci reaguje celkem přirozeně. Je-li to expanze, natahuje svoji vlnovou délku ve shodě s expanzí; je-li to kontrakce, zkracuje svoji vlnovou délku ve shodě s kontrakcí. Světlo tedy kopíruje *expanzní funkci* $a(t)$. Platí to samozřejmě pro všechny vlnové délky. Nyní tedy ukážeme, že světlo kopíruje *expanzní funkci*:



Představme si, že jsme před miliardami let emitovali nějaký světelný impuls v místě r_e (index e jako emise) s počátkem emise v čase t_e a koncem emise v čase $t_e + \delta t_e$. V současnosti tento impuls zachytíme jako roztažený díky expanzi v místě r_n (index n jako nyní) expandujícího vesmíru tak, že první *foton* zachytíme v čase t_n a poslední *foton* v čase $t_n + \delta t_n$. Napíšeme rovnice pro akt emise a akt zachycení. Fotony se pohybují ve *Fridmanově metrice* (28) a víme, že rovnice pro šíření světla má

$ds^2 = 0$. Pro jednoduchost dále uvažujme pouze radiální směr, takže nám z původní rovnice vypadnou úhly. Pak můžeme na základě výrazu (28) psát pohybovou rovnici pro foton:

$$0 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \frac{1}{1 - kr^2} dr^2$$

$$c^2 dt^2 = a^2(t) \frac{1}{1 - kr^2} dr^2$$

$$cdt = a(t) \frac{1}{\sqrt{1 - kr^2}} dr$$

Po úpravách tedy dostáváme diferenciální rovnici pro šíření fotonu ve Fridmanově metrice:

$$\frac{cdt}{a(t)} = \frac{1}{\sqrt{1 - kr^2}} dr \quad (31)$$

Napíšeme ji pro první a poslední foton:

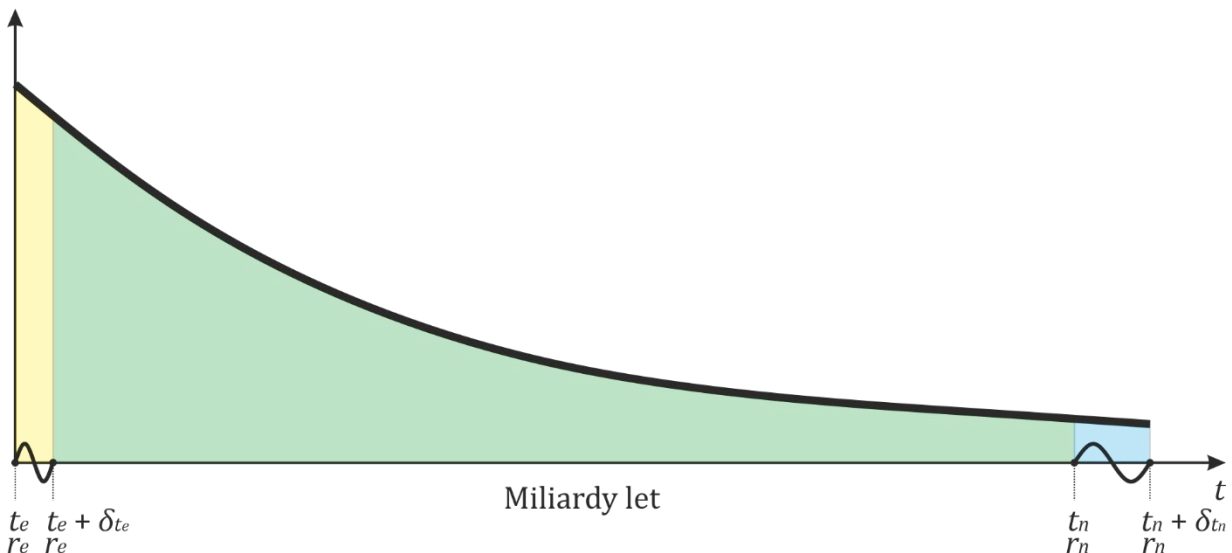
$$(1) \int_{t_e}^{t_n} \frac{cdt}{a(t)} = \int_{r_e}^{r_n} \frac{1}{\sqrt{1 - kr^2}} dr$$

$$(2) \int_{t_e + \delta t_e}^{t_n + \delta t_n} \frac{cdt}{a(t)} = \int_{r_e}^{r_n} \frac{1}{\sqrt{1 - kr^2}} dr$$

Zajímá nás rozdíl mezi počátkem a koncem impulsu, proto odečteme první rovnici od druhé:

$$\int_{t_e + \delta t_e}^{t_n + \delta t_n} \frac{cdt}{a(t)} - \int_{t_e}^{t_n} \frac{cdt}{a(t)} = 0$$

Nakresleme si geometrickou interpretaci rozdílu těchto dvou integrálů:



Matematický zápis je:

$$\int_{t_n}^{t_n + \delta t_n} \frac{cdt}{a(t)} - \int_{t_e}^{t_e + \delta t_e} \frac{cdt}{a(t)} = 0$$

Tento zápis ukazuje, že nemusíme uvažovat celou historii vesmíru (miliardy let) a co se s ním celou tu dobu dělo. Stačí, když uvažujeme pouze dobu emise impulsu na začátku a dobu zachycení impulsu v současnosti. Označme hodnotu *expanzní funkce* v době emise impulsu a_e a v době zachycení impulsu a_n . Potom můžeme psát:

$$\frac{c}{a_n} \int_{t_n}^{t_n + \delta t_n} dt - \frac{c}{a_e} \int_{t_e}^{t_e + \delta t_e} dt \approx 0$$

Zde nepíšeme rovnítko, protože jsme zanedbali vývoj *expanzní funkce* v průběhu emise impulsu na začátku i v průběhu přijetí impulsu na konci. To si můžeme dovolit, protože k výrazné změně hodnoty *expanzní funkce* dochází v řádu miliard let nikoli v řádu vteřin. Výraz dále upravíme:

$$\frac{c}{a_n} \delta t_n - \frac{c}{a_e} \delta t_e = 0$$

$$\frac{c \delta t_n}{a_n} = \frac{c \delta t_e}{a_e}$$

Pokud zvolíme dobu trvání impulsu jednu periodu, pak můžeme psát:

$$\frac{\lambda_n}{a_n} = \frac{\lambda_e}{a_e} \quad (32)$$

Vidíme, že vlnová délka světla se mění tak, jak se mění *expanzní funkce* neboli poměr vlnové délky a hodnoty *expanzní funkce* je stejný po celou dobu existence vesmíru. Toto popisujeme pomocí veličiny, které se říká *červený kosmologický posuv* a ten je definován:

$$z \equiv \frac{\Delta \lambda}{\lambda_e} = \frac{\lambda_n - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{a_n - a_e}{a_e} \quad (33)$$

Nejvzdálenější objekty, které dnes dokážeme sledovat, mají *červený kosmologický posuv* 10 až 12. Čili $\Delta \lambda$ představuje přibližně desetinásobek původní vlnové délky. Nabízí se následující otázka: Pokud pozorujeme *červené posuvy* spektrálních čar a říkáme, že se vesmír rozpíná, jedná se nebo nejedná se o *Dopplerův jev*? Samozřejmě, že se nejedná přímo o *Dopplerův jev*, protože *Dopplerův jev* souvisí s pohybem zdroje v prostoru (zdroj se vzdaluje, registrujeme *červený posuv*; zdroj se přibližuje, registrujeme *modrý posuv*). Ve výrazu (33) je ale vidět, že *červený kosmologický posuv* je způsoben *expanzní funkcí*. Čili rozdíl vlnových délek je dán expanzí. Ovšem pohyb je tam také. Když vesmír expanduje, galaxie se od nás vzdalují. Jaký je tedy mezi tím vztah? Pokud uděláme Taylorův rozvoj výrazu (33) $(a_n - a_e)/a_e$ do prvního řádu, dostaneme *Dopplerův jev*. *Dopplerův jev* tedy dostaneme v prvním řádu Taylorova rozvoje definice *kosmologického posuvu*. *Dopplerův jev* tedy souvisí s *kosmologickým posuvem*, ale nesmíme je zaměňovat. *Červený kosmologický posuv* představuje obecný posuv čar způsobený expanzí vesmíru a pouze v prvním řádu Taylorova rozvoje splývá s *Dopplerovým jevem*.

4.1.2 Inlace, kontrakce, expanze, kritická hustota

Vezměme rovnici pro *expanzní funkci*:

$$\dot{a}^2 - \frac{8}{3} \pi G \rho a^2 = -kc^2$$

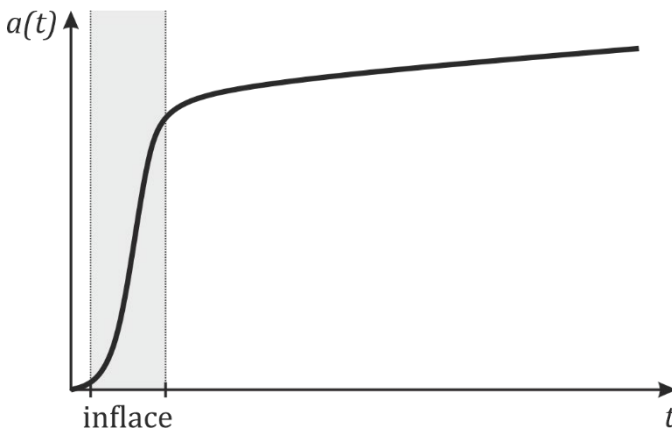
Už víme, že obsahuje *kinetický člen* (\dot{a}^2) představující expanzi, *gravitační člen* ($8\pi G \rho a^2/3$) způsobující kontrakci a člen ($-kc^2$) určující celkovou *křivost*. Poznamenejme, že k není lokální zakřivení kolem nějakého objektu, ale celkové zakřivení světa (zprůměrované). Ze všech měření vychází, že pravá strana rovnice je přibližně nulová. To znamená, že *kinetický člen* je přibližně rovný *gravitačnímu*. Oba tyto členy jsou extrémně veliké. Máme tedy nepoměr dvou extrémně velikých členů k extrémně

malému. Může to být způsobeno tím, že v historii vesmíru došlo k nějaké prudké expanzi. Podívejme se na to podrobněji. Upravme rovnici pro *expanzní funkci* tak, že obě strany vydělíme a^2 :

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{8}{3}\pi G\rho = -\frac{kc^2}{a^2} \quad (34)$$

Představme si, že v historii vesmíru na krátký okamžik došlo k nějakému prudkému exponenciálnímu rozepnutí o mnoho řádů (období *inflace*). Dnes věříme, že k tomu došlo velmi brzo po vzniku světa:

$$a(t) = a_0 e^{\chi t}$$



Pokud dále upravíme rovnici pro *expanzní funkci* (34) dosazením exponenciální funkce pro fázi *inflace*, dostaneme:

$$\left(\frac{d e^{\chi t}}{e^{\chi t}}\right)^2 - \frac{8}{3}\pi G\rho = -\frac{kc^2}{(e^{\chi t})^2} ; \quad a = e^{\chi t}$$

$$\left(\frac{\chi \cdot e^{\chi t}}{e^{\chi t}}\right)^2 - \frac{8}{3}\pi G\rho = -\frac{kc^2}{e^{2\chi t}}$$

$$\chi^2 - \frac{8}{3}\pi G\rho = -\frac{kc^2}{e^{2\chi t}}$$

Vidíme, že v prvním členu levé strany se nám exponenciála neprojeví. Ve druhém členu rovněž nefiguruje exponenciála. Ale na pravé straně ve jmenovateli máme exponenciální funkci, která celý tento člen sráží k nule. *Inflační fáze* se tedy neprojeví na *kinetickém* ani *kontrakčním* členu, ale projeví se na *křivostním*, který efektivně pošle k nule. Takže věříme, že tím důvodem, proč dnes pozorujeme zhruba plochý vesmír, je skutečnost, že zde kdysi byla *inflační fáze*. Samozřejmě, že existují i alternativní vysvětlení, například *ekpyrotický model*, který představuje dotyk dvou pravesmírů ve více dimenzích, kde rovněž dochází k podobným jevům. Otázkou je, jak tyto hypotézy ověřovat, když se čas pohybuje někde v řádu 10^{-35} sekundy. Představme si svět před *inflací* plný kvantových fluktuací a svět po inflaci, kdy se tyto fluktuace změnily („rozfoukly“) na struktury konečných rozměrů, které jsou už měřitelné, což nepochybně znamenalo rozkmitání času a prostoru a genezi takzvaných *reliktních gravitačních vln*, které se dnes chystáme zachytávat. Nebude to tak dlouho trvat, kdy toho budeme schopni. Spektrum gravitačních vln, které vzniklo při *inflaci* je totiž naprosto odlišné od spektra v *ekpyrotickém modelu*. Čili pokud zachytíme gravitační vlny od této události, můžeme některý z těchto modelů vyloučit. Pokud se ptáme, proč došlo k *inflaci*, odpovědí je, že to může být forma fázového přechodu. Jak víme, systém, který se ochlazuje expanzí, prochází celou řadou fázových přechodů. Z běžné praxe například známe, že pára přechází ve vodu a ta pak v led a podobně. *Inflace* se dnes klade do období fázového přechodu, kdy se oddělila *silná interakce* od ostatních interakcí, což

představovalo obrovské uvolnění energie a „rozfouknutí“ vesmíru, pokud tento model je správný. *Inflace* tedy efektivně pošle k nule *křivost*.

Pokud jsou *kinetický* a *gravitační* člen v *expanzní funkci* (30) velké, záleží na tom, který z nich převládne. Když převládne *kinetický* člen, vesmír bude expandovat; když převládne *gravitační* člen, vesmír bude kontrahovat. Při bližším pohledu vidíme, že vše záleží na hustotě ρ . Velká hustota znamená *kontrakci*, malá *expanzi*:

$$\dot{a}^2 - \frac{8}{3}\pi G\rho a^2 = -kc^2 \quad ; \quad \rho > \rho_c \quad ; \quad \text{kontrakce} \quad ; \quad k > 0 \\ \rho < \rho_c \quad ; \quad \text{expanze} \quad ; \quad k < 0$$

Jak se to projeví na *křivosti*, která je malá? Pokud převládne *gravitační* člen (případ velké hustoty), levá strana rovnice bude záporná a *křivost* bude větší než nula ($k > 0$). Pokud převládne *expanzní* člen (případ malé hustoty), levá strana rovnice bude kladná a *křivost* bude menší než nula ($k < 0$). Toto jsou Fridmanovy závěry z roku 1922.

V roce 1912 naměřil Vesto Slipher ze spektrálních čar mlhoviny v Andromedě modrý posuv, to znamená, že objevil její přibližování k nám. V letech 1912 až 1915 proměřoval další extragalaktické mlhoviny (galaxie), kdy zjistil, že Andromeda byla výjimkou, protože všechny ostatní galaxie se od nás vzdalují. V roce 1927 Georges Edouard Lemaître (1894 - 1966), belgický kněz, který přednášel obecnou relativitu, jako první na světě interpretoval výsledky měření Vesto Sliphera jako expanzi vesmíru. Dále ukázal, že expanze je úměrná vzdálenosti objektů. Skutečnost, že vidíme objekty se od nás vzdalovat, neznamená, že jsme centrem expanze. Vesmír expanduje ze všech svých míst, a tomu se říká *kosmologický princip*. Expanze probíhá ve všech směrech z daného místa stejně, a tím rychleji, čím jsou objekty dál. A to platí pro libovolné místo ve vesmíru. V libovolném místě vesmíru můžeme také pozorovat ve všech směrech podobné struktury. V tomto smyslu je vesmír *homogenní* a *izotropní*. Lemaître zavedl koeficient úměrnosti K , což je konstanta, kterou dnes označujeme písmenem H a říkáme tomu *Hubbleova konstanta*:

$$v = Kd = Hd$$

Podle současných měření vychází *Hubbleova konstanta* $H = 68 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. V roce 1923 Edwin Hubble definitivně potvrdil, že Andromeda není mlhovina, ale galaxie a doplňuje Slipherova měření o další.

Jak souvisí s naší metrikou fakt, že rychlost vzdalování je úměrná vzdálenosti? Vyjdeme z rovnice pro *expanzní funkci* (34):

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{8}{3}\pi G\rho = -\frac{kc^2}{a^2}$$

Rychlosti v odpovídá časová změna *expanzní funkce* \dot{a} a vzdálenosti odpovídá *expanzní funkce* a . Když napíšeme Hubbleův-Lemaîtreův zákon pomocí *expanzní funkce*, dostaneme:

$$\dot{a} = Ha \Rightarrow H = \frac{\dot{a}}{a} \tag{35}$$

Časová změna vzdálenosti je úměrná vzdálenosti. Takže *Hubbleova konstanta* není nic jiného, než poměr časové změny *expanzní funkce* k samotné *expanzní funkci*. Nalezneme nyní *kritickou hustotu* ρ_c , což je stav mezi *expanzí* a *kontrakcí*. Výraz (34) upravíme dosazením výrazu (35):

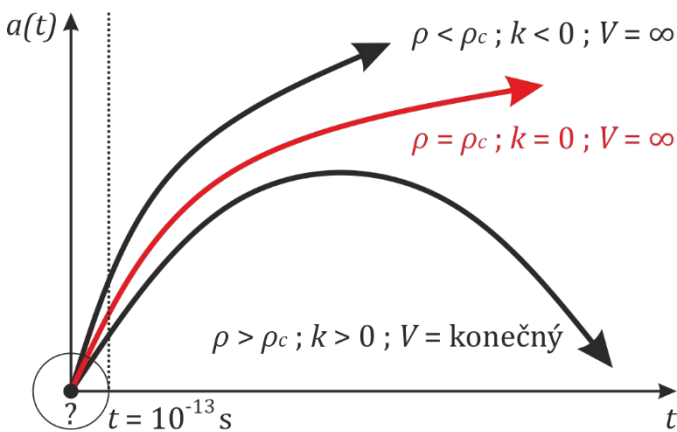
$$H^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho_c \Rightarrow \rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \tag{36}$$

Oba členy jak *kinetický*, tak *gravitační* se v případě *kritické hustoty* musí rovnat, protože nepřevažuje ani jedna složka (*křivost* je nulová). Je-li hustota vyšší, převládne *gravitace*, je-li nižší, převládne *expanze*. Všechny konstanty jsou známé, takže nyní můžeme vyčíslit *kritickou hustotu*:

$$H = 68 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \cong \frac{68 \cdot 1\,000}{3,086 \cdot 10^{16} \cdot 10^6} \cong 2,2035 \cdot 10^{-18} \text{ m s}^{-1} \text{ m}^{-1}$$

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \cong \frac{3 \cdot (2,2035 \cdot 10^{-18})^2}{8\pi \cdot 6,674 \cdot 10^{-11}} \cong 8,68 \cdot 10^{-27} \text{ kg m}^{-3} \cong 5 \text{ nukleonů/m}^3$$

Čili pokud bude ve vesmíru v průměru 5 nukleonů (*protonů* nebo *neutronů*) v metru krychlovém, tak jsme na kritické hustotě. Prozatím jsme stále ve *Fridmanové metrice* a nediskutujeme o vlivu *temné hmoty* nebo *temné energie*:



Na obrázku jsou znázorněny všechny 3 varianty vesmíru. Spodní křivka představuje vesmír, který má hustotu větší než *kritickou*, u něhož v budoucnu převládne kontrakce; horní křivka představuje vesmír s hustotou menší než je *kritická* hustota, u něhož bude pokračovat expanze do nekonečna; prostřední červená křivka představuje vesmír právě s *kritickou* hustotou, což je jakýsi mezní stav, kdy se rozpínání zastaví v nekonečnu.

Poznamenejme, že prozatím nevíme, co na počátku „rozfouklo“ vesmír. Musela tam být nějaká počáteční *kinetická energie* například ve formě fázového přechodu z nějaké kvantové pěny do nějakého jiného stavu, která udělila vesmíru počáteční hybnost. Máme naději, že se to dozvíme studiem *reliktních gravitačních vln*. Budoucí osud vesmíru rovněž není znám, protože jak se ukázalo v roce 1998, figuruje zde ještě jakási *temná energie*, která způsobuje momentální zrychlování expanze a dokud se nedozvíme, co to přesně je, tak těžko můžeme predikovat budoucnost vesmíru. Co se týče minulosti, současná hranice našich znalostí sahá do časů řádově 10^{-13} sekundy po vzniku světa, což je čas, kdy byla ve vesmíru taková hustota a teplota látky, kterou dnes dokážeme zopakovat na největších urychlovačích světa. To znamená, že dokážeme připravit látku v tom stavu, který odpovídá času 10^{-13} sekundy. Co se dělo předtím, zatím nevíme. Tam je to pouze na úrovni hypotéz.

Zadání: Spočítejte objem vesmíru pomocí *Fridmanovy metriky* pro $k < 0$, $k = 0$ a $k > 0$. K výpočtu použijte výraz (6).

4.1.3 Průběh expanzní funkce pro různé entity

Vyjdeme z rovnice pro *expanzní funkci* (30):

$$\dot{a}^2 - \frac{8}{3}\pi G\rho a^2 = -kc^2$$

(1) Vesmír vyplněný látkou ($m_0 \neq 0$)

Jedná se o soustavu částic, jejichž klidová hmotnost m_0 je nenulová. Vyjádříme si hustotu ρ :

$$\rho = \frac{N \cdot m_0}{V} \sim \frac{1}{a^3}$$

Kde N je počet částic a V je objem. Počet částic N se nemění, klidová hmotnost m_0 se nemění a objem V je úměrný třetí mocnině *expanzní funkce* (a^3). Pokud tedy vesmír expanduje, hustota částic ρ klesá s třetí mocninou *expanzní funkce*. První a druhý člen rovnice pro *expanzní funkci* dávají velkou hodnotu a přibližně se vyruší, protože *křivost* je přibližně nulová (kladná nebo záporná), takže můžeme psát:

$$\dot{a}^2 \approx \frac{8}{3} \pi G \rho a^2$$

Vesmír je tedy blízky ploché variantě, čili hustota ρ je blízká *kritické hustotě* ρ_c a je nepřímo úměrná třetí mocnině *expanzní funkce*. Po dosažení za hustotu ρ můžeme psát:

$$\dot{a}^2 \sim \frac{1}{a^3} a^2 = \frac{1}{a}$$

$$\dot{a} \sim a^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{da}{dt} \sim a^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} da \sim dt$$

$$\frac{2}{3} \sim t$$

$$a(t) \sim t^{\frac{2}{3}} \quad (37)$$

Takže pro vesmír vyplněný látkou je *expanzní funkce* úměrná času umocněného na dvě třetiny. Poznamenejme, že jsme zde pro zjednodušení nepsali žádný koeficient. Namísto toho píšeme znak úměrnosti. Zajímá nás pouze vztah.

(2) Vesmír vyplněný zářením ($m_0 = 0$)

Zářením rozumíme pole asociované s částicemi, jejichž klidová hmotnost m_0 je nulová (elektromagnetické pole, jehož kvanta jsou *fotony* s nulovou klidovou hmotností). Vyjádříme si tedy hustotu ρ . Namísto nulové klidové hmotnosti m_0 musíme použít hmotnost m , které odpovídá energie $E_\nu = mc^2$. Energie E_ν je nepřímo úměrná vlnové délce *fotonu*. Z předchozího víme, že vlnová délka λ je přímo úměrná *expanzní funkci* a objem V je úměrný třetí mocnině *expanzní funkce*. Potom můžeme psát:

$$\rho = \frac{N \cdot m}{V} \sim \frac{N \cdot E_\nu}{V} \sim \frac{\lambda^{-1}}{V} \sim \frac{a^{-1}}{a^3} \sim \frac{1}{a^4}$$

Čili pro takovou soustavu částic, které mají nulovou klidovou hmotnost, musíme hustotu částic vyjádřit pomocí energie, protože hmotnost je určena touto entitou. Vidíme, že hustota záření klesá se čtvrtou mocninou *expanzní funkce*, což je rozdíl oproti hmotě. V případě hmoty se hustota zmenšuje jedině díky tomu, že se zvětšuje objem. U záření jsou dva faktory; jednak se zvětšuje objem ($1/a^3$) a také se snižuje energie, protože se protahuje vlnová délka ($1/a$). Ukažme nyní, jak dopadne *expanzní funkce*:

$$\dot{a}^2 \approx \frac{8}{3} \pi G \rho a^2$$

Vesmír je blízký ploché variantě, čili hustota ρ je blízká kritické hustotě ρ_c a je nepřímo úměrná čtvrté mocnině *expanzní funkce*. Pak můžeme psát:

$$\dot{a}^2 \sim \frac{1}{a^4} a^2 = \frac{1}{a^2}$$

$$\dot{a} \sim \frac{1}{a}$$

$$\frac{da}{dt} \sim \frac{1}{a}$$

$$ada \sim dt$$

$$a^2 \sim t$$

$$a(t) \sim t^{\frac{1}{2}} \quad (38)$$

Vesmír vyplněný zářením bude expandovat jinak, než vesmír vyplněný hmotou. *Expanzní funkce* je úměrná času umocněného na jednu polovinu. Poznamenejme, že jsme zde pro zjednodušení opět nepsali konstanty. Namísto toho píšeme znak úměrnosti.

(3) Vesmír vyplněný vakuem (prázdný vesmír)

Kvantová teorie nás učí, že neexistuje prázdnota. Existují relace neurčitosti, které říkají, že nikdy nezměřím současně polohu a rychlost, což platí nejen o částicích, ale také o polích. V případě částic, čím přesněji určím polohu částice, tím méně přesně určím její rychlost a naopak. I když půjdeme k absolutní nule, tak za této teploty krystaly nemohou být bez pohybu, protože jinak bychom znali současně přesně jak polohu, tak rychlost jednotlivých iontů v krystalické mřížce, která by byla nulová. Takže při absolutní nule existují jakési nulové kmity vynucené kvantovou teorií. Totéž platí pro pole. Ve vakuu musí být vždy přítomny nějaké fluktuace polí. Vakuum tedy není nikdy prázdné. Jedná se o dynamické vakuum. Podle kvantové teorie tyto fluktuace polí nejsou nijak závislé na objemu, což znamená, že v jednotce objemu je stále stejný počet fluktuací polí. Takže hustota fluktuací takového vesmíru bude konstantní a nebude sledovat expanzi. Jinými slovy, s rostoucím objemem nám úměrně tomu vzniká příslušný počet fluktuací tak, že hustota těchto fluktuací je stále stejná:

$$\rho = \text{konst}$$

Vesmír je blízký ploché variantě, čili hustota ρ je blízká kritické hustotě ρ_c a je konstantní. Ukažme nyní, jak bude vypadat *expanzní funkce*:

$$\dot{a}^2 \approx \frac{8}{3} \pi G \rho a^2$$

$$\dot{a}^2 \sim \rho a^2 \sim a^2$$

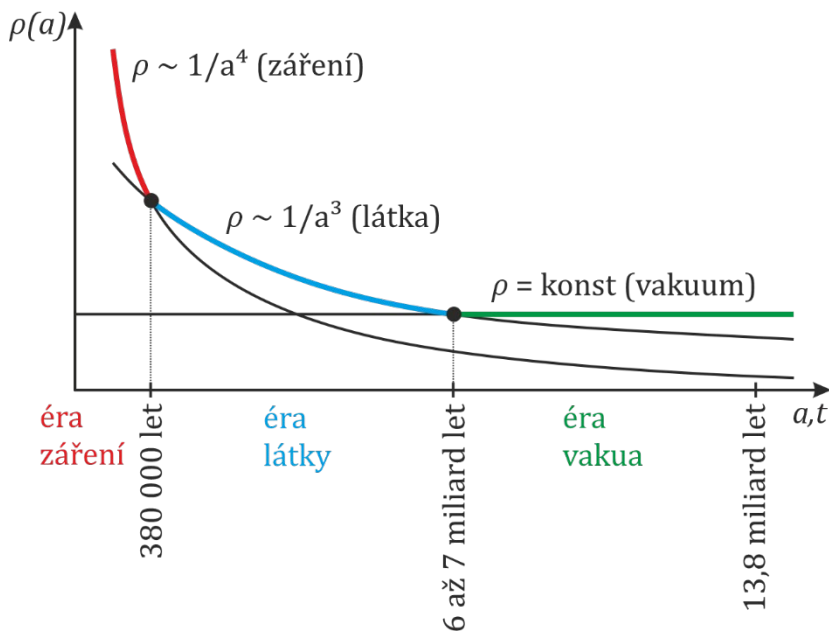
$$\dot{a} \sim a$$

Vidíme, že derivace *expanzní funkce* se rovná samotné *expanzní funkci*, což znamená, že se jedná o exponenciální funkci, protože jak víme, derivace exponenciální funkce dává opět exponenciální funkci. Takže můžeme psát:

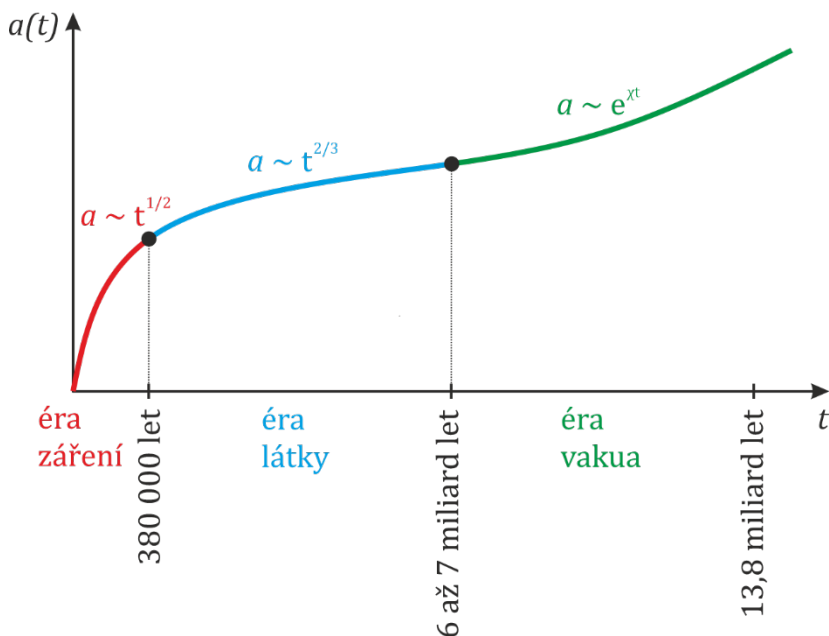
$$a(t) \sim e^{\lambda t} \quad (39)$$

Čili takovýto vesmír by expandoval exponenciálně.

Vidíme tedy, že na každou entitu reaguje vesmír jinak. Znázorněme si to graficky:



V historii vesmíru tedy existovaly tři oddělené éry. V první éře (0 - 380 000 let) dominovalo záření, ve druhé éře (380 000 let - 6 až 7 miliard let) dominovala látka a ve třetí éře (6 až 7 miliard let - dodnes) dominuje vakuum, kdy expanze vesmíru se stává zrychlenou, protože největší procentuální podíl zde má konstantní hustota u které víme, že vede na exponenciální expanzi. Prozatím si nejsme jisti, zda tato zrychlená expanze skutečně souvisí s vakuovými fluktuacemi. Stáří vesmíru podle současných poznatků je 13,8 miliardy let. K tomuto odhadu se došlo na základě analýzy fluktuací *reliktního záření* z konce *Velkého třesku*. První odhad ze sondy WMAP byl v roce 2003 $(13,7 \pm 0,3) \cdot 10^9$ let, pozdější odhad ze sondy Planck v roce 2013, který je přesnější, činí $(13,8 \pm 0,1) \cdot 10^9$ let. Čili dnes už známe stáří vesmíru poměrně přesně. Nyní se podívejme, jak to vypadá se samotnou *expanzní funkcí*:



Na obrázku je znázorněna *expanzní funkce*. Zpočátku v éře záření se chová *expanzní funkce* jako $a(t) \sim t^{1/2}$, poté spojitě přechází do éry látky v umírněnou expanzi $a(t) \sim t^{2/3}$, po této éře plynule přechází do éry vakua, kde již dominuje zrychlená expanze $a(t) \sim e^{xt}$. Čili v různých obdobích můžou za dominantní průběh expanze různé entity. Poznamenejme, že graf nezahrnuje počáteční exponenciální fázi. Jak již bylo zmíněno, *inflace* nám nastavila vesmír jako relativně plochý, takže průběh *expanzní funkce* by měl ještě zahrnovat tuto prudkou inflační fázi sahající do počátečního období po vzniku vesmíru, která zřejmě nastala jako důsledek nějakého fázového přechodu.

4.1.4 Omega parametry

V *expanzní funkci* rozdělme hustotu látky, záření a vakua:

$$\dot{a}^2 - \frac{8}{3}\pi G\rho a^2 = -kc^2 \quad ; \quad \rho = \rho_L + \rho_Z + \rho_V \quad , \quad \alpha = \frac{8}{3}\pi G$$

Kde ρ_L je hustota látky, ρ_Z je hustota záření a ρ_V je hustota vakua. Potom můžeme psát:

$$\dot{a}^2 - \alpha(\rho_L + \rho_Z + \rho_V)a^2 = -kc^2$$

Dosadíme výraz (35) pro *Hubbleovu konstantu*, upravíme a dostáváme:

$$H^2 a^2 - \alpha(\rho_L + \rho_Z + \rho_V)a^2 = -kc^2$$

$$H^2 - \alpha(\rho_L + \rho_Z + \rho_V) = -\frac{kc^2}{a^2}$$

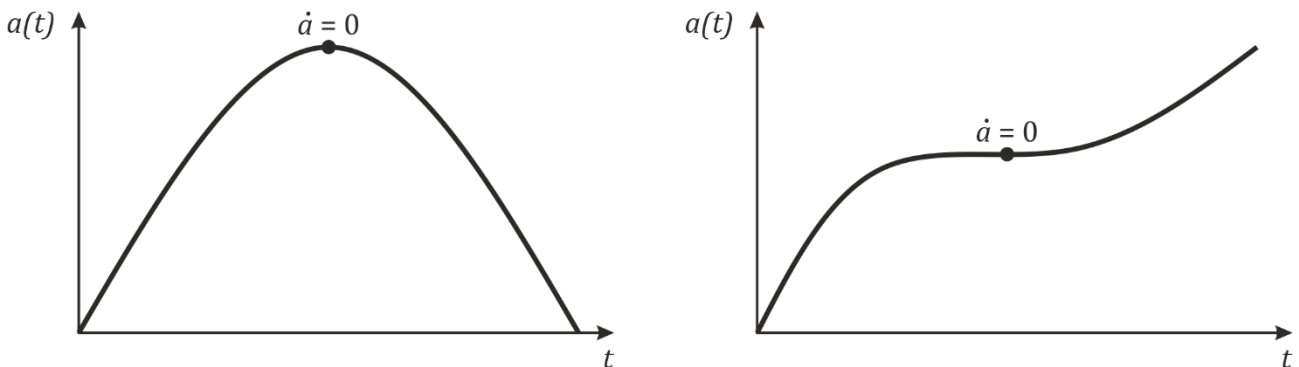
$$1 = \frac{\alpha\rho_L}{H^2} + \frac{\alpha\rho_Z}{H^2} + \frac{\alpha\rho_V}{H^2} - \frac{kc^2}{H^2 a^2}$$

$$1 = \Omega_L + \Omega_Z + \Omega_V + \Omega_K \quad ; \quad \Omega_L = \frac{\alpha\rho_L}{H^2} \quad , \quad \Omega_Z = \frac{\alpha\rho_Z}{H^2} \quad , \quad \Omega_V = \frac{\alpha\rho_V}{H^2} \quad , \quad \Omega_K = -\frac{kc^2}{H^2 a^2} \quad (40)$$

Příspěvky od látky Ω_L , příspěvek od záření Ω_Z a příspěvek vakua Ω_V jsou nezáporné, kdežto příspěvek od zakřivení Ω_K může být kladný i záporný podle koeficientu celkové *křivosti* k . Pravděpodobně se k blíží nule, čili příspěvek Ω_K je nejmenší:

$$1 = \Omega_L + \Omega_Z + \Omega_V + \Omega_K \quad ; \quad \Omega_L \approx 0,32 = 0,27 + 0,05 \quad , \quad \Omega_Z \approx 0,002 \quad , \quad \Omega_V \approx 0,68 \quad , \quad \Omega_K \approx 0$$

Ve vesmíru je zhruba 32 % látky ($\Omega_L \approx 0,32$) a 68 % něčeho, co ho „rozfukuje“ ($\Omega_V \approx 0,68$), pravděpodobně vakuové energie. 32 % látky dále dělíme na 27 % *temné hmoty* a 5 % atomární látky. Záření tvoří asi 0,2% ($\Omega_Z \approx 0,002$). Ovšem je třeba pamatovat na to, že toto rozdělení selže v okamžiku, kdy *expanzní funkce* neroste ani neklesá:



V tomto okamžiku je derivace *expanzní funkce* nulová, což znamená, že rovněž *Hubbleova konstanta* určená výrazem (35) $H = \dot{a}/a$ je nulová. A pokud v *omega parametrech* dělíme kvadrátem *Hubbleovy konstanty*, pak tento postup selhává, protože nelze dělit nulou. Čili tento postup nemůžeme použít pro vesmír, kde *expanzní funkce* v nějakém okamžiku neroste ani neklesá. Lze jej použít buď čistě na expandující vesmír, nebo kolabující vesmír. Nelze jej tedy použít ani na stacionární vesmír. Takže toto rozdělení na *omega parametry* je možné pouze za podmínky $\dot{a} \neq 0$. Ještě se podívejme na chování *omega parametrů* (40):

$$\Omega_L \sim \frac{1}{a^3} \quad , \quad \Omega_Z \sim \frac{1}{a^4} \quad , \quad \Omega_V \sim \frac{1}{a^0} \quad , \quad \Omega_K \sim \frac{1}{a^2}$$

Jak vidíme, i na *křivost* se můžeme dívat jako na nějakou hmotnou entitu, která se mění s expanzí.

4.1.5 Klíčový kosmologický parametr w

Hustota hmoty ρ je dána vztahem:

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V} \quad ; \quad [\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Můžeme zavést rovněž hustotu energie u :

$$u = \frac{\Delta U}{\Delta V} \quad ; \quad [u] = \frac{\text{J}}{\text{m}^3}$$

Tyto dvě veličiny ρ a u se od sebe liší pouze vztahem $E = mc^2$, takže můžeme psát:

$$u = \frac{\Delta U}{\Delta V} = \frac{\Delta mc^2}{\Delta V} = \rho c^2$$

Vidíme, že tyto dvě veličiny se od sebe liší pouze kvadrátem rychlosti světla. Jedná se o vztah $E = mc^2$ zapsaný pomocí hustot $u = \rho c^2$. Takže jestliže nám hustota látky nějakým způsobem klesá, tak stejným způsobem klesá i hustota energie. V kosmologických aplikacích se většinou mluví o hustotě a příliš se nerozlišuje, zda jde o hustotu energie nebo látky, protože se to chová stejným způsobem. Ze základní fyziky víme, že tlak je definován jako síla působící na plochu:

$$p = \frac{\Delta F}{\Delta S} \quad ; \quad [p] = \text{Pa} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

Pokud tlaková síla ΔF působí na plochu ΔS , kterou posune o Δl , koná práci, což představuje změnu vnitřní energie ΔU :

$$p = \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{\Delta F \Delta l}{\Delta S \Delta l} = \frac{\Delta U}{\Delta V} = u$$

Čili v klasické mechanice je tlak roven hustotě energie:

$$p = u \quad ; \quad [p] = \text{Pa} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \frac{\text{Nm}}{\text{m}^3} = \frac{\text{J}}{\text{m}^3} = [u]$$

Jak víme, v gravitačním poli je energie dána výrazem:

$$W = mgh$$

Hustota energie pak bude:

$$u = \frac{\Delta W}{\Delta V} = \frac{\Delta mgh}{\Delta V} = \rho gh = p$$

Tedy gravitační (tíhové) pole působící například na plyn nebo tekutinu vytváří hydrostatický tlak p , a ten je roven hustotě energie u .

Jak dále víme, elektromagnetické záření má tlakový účinek a pro záření platí, že tlak je roven jedné třetině hustoty energie:

$$p = \frac{1}{3}u$$

Pokud se jedná o obecnou entitu, pak platí $p \sim u$:

$$p = wu \quad (41)$$

Kde w je parametr, tedy koeficient úměrnosti mezi tlakem p a hustotou energie u . Pro mechaniku je koeficient úměrnosti w roven 1, v případě elektromagnetického záření je w rovno 1/3. Nyní najdeme parametr w pro různé entity. Z termodynamiky víme, že teplo dQ dodané do systému se změní jednak na vnitřní energii dU (systém se energeticky obohatí) a mechanickou práci dA (kterou systém může vykonat):

$$dQ = dU + dA = d(u \cdot V) + p \cdot dV \quad ; \quad U = u \cdot V \quad , \quad dA = F \cdot dl = p \cdot dS \cdot dl = p \cdot dV$$

Adiabatický děj je děj, kdy je soustava izolována vůči okolí a tedy žádné teplo se do ní nedodává. Izolace je možná trojím způsobem:

- (a) Soustavu zaizolujeme. Například zateplení domu polystyrénem.
- (b) Děj je tak rychlý, že soustava si nestačí vyměňovat teplo s okolím. Například zvukové vlny, které rozkmitají molekuly vzduchu, kdy změny jsou tak rychlé, že vlny nestačí předávat teplo okolí.
- (c) Celý vesmír. Vesmír si nemá s čím vyměňovat teplo, protože je v něm již zahrnuto vše, takže $dQ = 0$. Celý vesmír tedy chápeme jako *adiabatický systém*, protože si s ničím dalším nevyměňuje teplo.

Můžeme psát:

$$0 = d(u \cdot V) + p \cdot dV \quad ; \quad V = \gamma \cdot a^3 \quad , \quad u = \frac{u_0}{a^\alpha} \Rightarrow u_0 = u \cdot a^\alpha$$

Jak vesmír expanduje, objem V expanduje se třetí mocninou (a^3); γ je konstanta (kdyby byl vesmír koule, pak by bylo $\gamma = 4\pi/3$ a podobně, ovšem proti nule se nám stejně vykrátí, takže na tom, jak vypadá vesmír, nesejde). Předpokládejme, že hustota energie u reaguje jako $1/a^\alpha$, kde $\alpha = 4$ pro záření, $\alpha = 3$ pro látku, $\alpha = 2$ pro křivost, $\alpha = 0$ pro *vakuové fluktuaace*. Dosadíme, upravíme a dostáváme:

$$0 = d\left(\frac{u_0}{a^\alpha} \cdot \gamma \cdot a^3\right) + p \cdot d(\gamma \cdot a^3)$$

$$0 = u_0 \cdot d(a^{3-\alpha}) + p \cdot d(a^3)$$

$$0 = u_0 \cdot (3 - \alpha) \cdot a^{2-\alpha} \cdot da + p \cdot 3a^2 \cdot da$$

$$0 = [(3 - \alpha) \cdot u_0 \cdot a^{2-\alpha} + 3a^2 \cdot p] \cdot da$$

$$0 = [(3 - \alpha) \cdot u \cdot a^\alpha \cdot a^{2-\alpha} + 3a^2 \cdot p] \cdot da$$

$$0 = a^2 \cdot [(3 - \alpha) \cdot u + 3 \cdot p] \cdot da$$

$$(3 - \alpha)u + 3p = 0$$

$$p = \frac{(\alpha - 3)}{3}u$$

Porovnáme s výrazem (41) a dostáváme:

$$w = \frac{(\alpha - 3)}{3}$$

Pro entitu, jejíž hustota (energie, hmoty) u reaguje na expanzi a tak, že klesá jako $1/a^\alpha$, dostáváme stavovou rovnici $p = wu$, kde w je dán exponentem poklesu α :

$$p = wu \quad ; \quad w = \frac{(\alpha - 3)}{3} \quad ; \quad u = \frac{u_0}{a^\alpha} \quad (42)$$

$$\text{Pro } \alpha = 4 \text{ (záření)} \Rightarrow p = wu = \frac{(\alpha - 3)}{3} u = \frac{(4 - 3)}{3} u = \frac{1}{3} u$$

Tento vztah, že tlak p je třetinou hustoty energie u , je známý také z *Teorie elektromagnetického pole*. Zde jsme si jej ověřili přes termodynamiku.

$$\text{Pro } \alpha = 3 \text{ (látka)} \Rightarrow p = wu = \frac{(\alpha - 3)}{3} u = \frac{(3 - 3)}{3} u = 0$$

Vidíme, že vesmír vyplněný látkou nevyvíjí žádný tlak.

$$\text{Pro } \alpha = 0 \text{ (vakuum)} \Rightarrow p = wu = \frac{(\alpha - 3)}{3} u = \frac{(0 - 3)}{3} u = -u$$

Vidíme, že v případě vakua se jedná o záporný tlak (podtlak), což vede k expanzi vesmíru. V předchozím textu jsme ukázali, že pro vakuum je *expanzní funkce* exponenciální. V současné době se zdá, že pro vakuum je w parametr roven přibližně -1 . Souvislost vakuových fluktuací s expanzí vesmíru se zdá být dobrou myšlenkou a cestou kupředu.

4.2 Obecné informace a pozorování (část 4)

Na objevu expanze vesmíru se podíleli především tito tři pánové: Vesto Slipher, Georges Lemaître a Edwin Hubble. Počátek objevu expanze vesmíru se týká dvou lokalit. První je Flagstaff, kde Vesto Slipher měřil *červený posuv* extragalaktických mlhovin, druhou lokalitou je Mount Wilson v blízkosti Los Angeles, kde se za ředitelování Edwina Hubblea konaly experimenty s 2,5 metrovým zrcadlem, které vedly ke změření *červeného posuvu*.

Vesto Slipher (1875 - 1969) pracoval ve Flagstaffu, což je observatoř, na které působil Percival Lowell (1855 - 1916), a kde se odehrála celá řada významných objevů. V roce 1912 změřil *modrý posuv* Andromedy, což znamená, že se k nám Andromeda přibližuje. Poté zjišťoval posuvy spektrální čar u ostatních mlhovin, o kterých se už v té době tušilo, že se nemusí nacházet v naší galaxii. Později se potvrdilo, že se nejedná o mlhoviny, ale o jiné galaxie. V letech 1912 - 1915 proměřil řadu spekter těchto extragalaktických mlhovin a ukázal, že kromě Andromedy s *modrým posuvem* se ve všech ostatních případech jedná o *červený posuv*, což znamená, že se tyto objekty od nás vzdalují. Důvod v té době neznal a ani to nedokázal vysvětlit. Později se Vesto Slipher stal ředitelem observatoře.

Jeho měření správně interpretoval Georges Edouard Lemaître (1894 - 1966), belgický kněz, velmi vzdělaný muž, který propadl Einsteinově obecné relativitě, ve které prováděl velmi podrobné výpočty a také o ní přednášel na Lovaňské univerzitě v Belgii. V roce 1927 tato měření interpretoval v jednom článku jako expanzi vesmíru. Dokonce odvodil *Hubbleovu konstantu*, čili zjistil, že expanze ze Slipherových měření je úměrná vzdálenosti. Koeficient úměrnosti spočítal na $500 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, což je jiné číslo, než známe dnes, ale je to tím, že tenkrát neznali vzdálenosti extragalaktických mlhovin, protože měli problém s jejich určováním. V roce 1928 americký matematik Howard Robertson (1903 - 1961) dělá analýzy *Fridmanovy metriky* týkající se *červeného posuvu* galaxií. V té době je už jasné, že vesmír expanduje.

V roce 1929 publikuje Edwin Hubble (1889 - 1953) článek o expanzi vesmíru, kde použil Slipherova měření a měření z Mount Wilsonu, která prováděl Milton Humason (1891 - 1972) a učinil závěr, že vesmír expanduje tak, že expanze je úměrná vzdálenosti a ohlásil objev expanze vesmíru, která byla ve skutečnosti objevena už dva roky předtím.

V roce 1948, kdy si většina fyziků myslela, že lidstvu nepřísluší zkoumat vznik vesmíru (dokonce si někteří mysleli, že vesmír nevznikl, ale že tady byl vždy a bude napořád), tak George Gamov (1904 - 1968) předkládá světu *Teorii horkého původu vesmíru* (*αβγ model* podle autorů Ralph Alpher, Hans Bethe, George Gamov, Robert Herman) a ukazuje, že vesmír musel být na počátku v plazmatickém skupenství, což znamená, že *elektrony* nebyly vázány v atomu, ale volné. Se svými kolegy pracoval také na modelu vzniku lehkých jader prvků, například *deuterium*, *tritium*, *lithium*, *bór* a podobně. *Teorie horkého původu vesmíru* se nelíbila některým současníkům, jako je například Fred Hoyle (1915 - 2001), což byl anglický astronom a rovněž vynikající vědec, který jako první pochopil, co se děje v nitru hvězd, jak tam vzniká *uhlík*, *kyslík* a podobně. Nelíbila se mu ovšem Gamovova *Teorie horkého původu světa*. A protože rovněž popularizoval fyziku a měl svůj vlastní pořad na rozhlasové stanici BBC, kde pravidelně hovořil o výsledcích výzkumu, jednoho večera tam pejorativně označil *Teorii horkého původu světa* souslovím *Big Bang*. Myslel tím, že se jedná o naprosto nesmyslnou teorii, hnus, odpor, velké plácnutí, velký nesmysl, velkou ptákovinu. Tento název se ovšem ujal a dnes už v tom nikdo necítí nic špatného. Místo názvu *Teorie horkého původu světa* se říká *Teorie velkého třesku*.

Plazma je entita, ve které se nachází volné *elektrony*. Například když zahříváte látku, stane se nejprve kapalinou, a pak plynem. Pokud budeme zahřívát dál, odtrháme *elektrony* z atomárních obalů a začne to být vodivé. Začne to reagovat na elektrická a magnetická pole, což plyn nedělá. A bude to také tato pole vytvářet. Raný vesmír byl v plazmatickém skupenství, což také znamená, že byl neprůhledný, protože obsahoval volné *elektrony*, které reagují na elektromagnetické záření díky tomu, že jakákoliv elektromagnetická vlna má elektrickou a magnetickou složku. Elektrická složka rozkmitá *elektron*, který převezme energii vlny. Kmitající *elektron* znovu vytváří elektromagnetickou vlnu. Jedná se tedy o akt absorpce vlny volnými *elektrony* a opětovné vyzáření vlny v náhodném směru podle momentální rychlosti daného *elektronu*. Záření takovýmto plazmatem proniká difúzí. *Fotony* jsou zachyceny a znovu vyzářeny. Ovšem nejsou to ty stejné *fotony*. Mnohdy jsou to *fotony* o nižších energiích. Tentýž proces se odehrává ve Slunci. Nitro Slunce je plazmatická koule. V centru vzniká energie fúzními reakcemi, která je uvolňována v podobě *fotonů*. Plazmatická koule brzdí *fotony* způsobem, že uletí několik centimetrů, jsou zachyceny *elektrony* a znovu vyzářeny v náhodném směru, například zpět k jádru a tak stále dokola. Kdyby tato energie z jádra letěla rychlostí světla k povrchu Slunce, pak je tam zhruba za 2 sekundy. Ale tím, že je jí bráněno volnými *elektrony*, tak se *fotony* dostanou k povrchu v průměru za milion let. Čili pokud sledujeme povrch Slunce, vidíme aktivitu, která odráží stav jádra před milionem let. Je to tedy vše se zpožděním.

Plazmatická fáze vesmíru trvala prvních 380 000 let a celé toto období dnes nazýváme *Velký třesk*. Ve vesmíru dominovalo elektromagnetické záření. Po tomto období vesmír ochladnul na několik tisíc kelvinů a při této teplotě se *elektrony* navázaly do atomárních obalů. V tuto chvíli se z toho stal průhledný plyn, protože záření již nebylo schopno rozkmitat pevně vázané *elektrony* v obalech atomů. *Elektrony* v atomech měly již dány pevné energetické hladiny, a proto už nebyly schopné se rozkmitat. Jinými slovy, plazma představuje rovnováhu záření a látky. Jakmile se však plazma stalo plynem, záření se uvolnilo. Bylo stále přítomno, ale nebylo viditelné, protože neinteragovalo s látkou. Říká se tomu *temný věk vesmíru*. *Temný věk vesmíru* končí se zrodem prvních hvězd. První hvězdy emitovaly agresivní elektromagnetické ultrafialové záření, které ionizovalo plyn kolem sebe, a ten se stal opět plazmatem. Čili celá historie vesmíru je plazmatická kromě krátkého období od 380 000 let do 550 milionů let, kterému říkáme *temný věk*. Je to plynná éra vesmíru, kdy záření je sice součástí, ale nijak se neprojevuje.

Jak víme z předchozího textu, záření s expanzí prodlužuje svoji vlnovou délku. Záření, které se oddělilo od látky na konci *Velkého třesku*, mělo vlnovou délku viditelného světla (500 až 700 nanometrů). Za těch zhruba 14 miliard roků (do dneška) se protáhla jeho vlnová délka přibližně na 1 mm. Dnes toto záření přijímáme speciálními sondami na milimetrové vlnové délce, což je v mikrovlnné oblasti. Říkáme tomu *reliktní záření* anebo také *mikrovlnné záření pozadí*.

V roce 1965 Arno Penzias (* 1933) a Robert Wilson (* 1936) náhodou objevili toto *reliktní záření*. Při testech zrekonstruované antény, pomocí níž měla být udělána mapa oblohy na vlnové délce 7,3 cm, zjistili enormní šum. Nejprve si mysleli, že pochází z blízkých měst, což vzápětí vyloučili, protože přicházelo ze všech směrů. Pak si všimli, že v anténě sídlí párek holubů a tak si mysleli, že našli

problém. Ale i přes odstranění holubů šum zůstal. V této době se již zapomělo na slavný $\alpha\beta\gamma$ model, takže celou věc znovu počítali Jim Peebles, Robert Dicke, David Wilkinson a další lidé, kteří rozuměli věci a dospěli k závěru, že ten šum by měl být právě *reliktním zářením* neboli pozůstatkem z konce *Velkého třesku*.

V roce 1989 byla vypuštěna družice *COBE* (*Cosmic Background Explorer*). Jejím úkolem bylo proměřit reliktní záření a získat další informace. Byl to nejrychleji splněný kosmický program, protože všechny úkoly splnila během 8 minut. Proměřila závislost intenzity záření na frekvenci a zjistila, že ten šum skutečně kopíruje *Planckovu křivku* a jedná se o *reliktní záření* s teplotou 2,73 stupňů kelvinů. Družice dále měřila celé 4 roky a největší objev udělala v roce 1992, kdy zjistila, že v tom šumu se nachází teplejší a chladnější oblasti, což znamená, že tento šum není ve všech směrech přesně stejný, ale je *anizotropní*. Rozdíly v teplotě jsou nepatrné. Liší se na čtvrtém až pátém desetinném místě. Ale z toho je jasné, že už na konci *Velkého třesku* existovaly jakési nehomogenity (*fluktuace v reliktním záření*). A jestliže si uvědomíme, že do té doby bylo záření propojené s látkou, tak stejné hustotní fluktuace musely být také v látce. Čili to, co dnes vidíme v reliktním záření, odráží stav látky na konci *Velkého třesku*. A tyto pozorované hustotní fluktuace v *reliktním záření* ukazují na zárodky, ze kterých později vznikly hvězdy, galaxie, kupy galaxií a vše, co kolem vidíme. Je to docela zajímavé, protože když půjdeme v čase zpět blíže k počátku *Velkého třesku*, pak tam zřejmě musely být také kvantové fluktuace a existoval proces, jenž tyto mikroskopické fluktuace převedl na makroskopické fluktuace. Ty se pak dále vyvinuly do objektů, které pozorujeme dnes. Pokud tedy připustíme, že fluktuace, které pozorujeme v *reliktním záření*, existovaly také jako látkové (hustotní), pak to není nic jiného než zvuková vlna. Zvuková vlna je ve své podstatě hustotní fluktuace. Někdy se tomu říká *Baryon Acoustic Oscillations (BAO)* neboli *zvukové oscilace běžné látky*. Látka musela být nějakým způsobem rozkmitána. Je to jakýsi prvotní zvuk vesmíru. Poznamenejme, že *baryony* jsou částice složené ze tří *kvarků*. Mezi ně patří *neutron* a *proton*. Jsou to tedy částice atomového jádra. Pokud máme nahrávku nějakého zvuku, pak jej dokážeme rozdělit na jednotlivé frekvence a z procentuálního zastoupení jednotlivých frekvencí dokážeme zjistit, jaký byl původ toho zvuku. Takže vznikla výborná myšlenka udělat spektrum fluktuací *reliktního záření* a z toho usuzovat na to, jaký ten vesmír tenkrát byl. Jenže tuto analýzu nelze udělat z dat družice *COBE*, protože měla úhlové rozlišení 7 stupňů a tedy zobrazené fluktuace nejsou dostatečně jemné a splývají. Dalším důležitým bodem je, že frekvenční rozvoj se musí dělat do kulových funkcí, nikoli do sinů a cosinů, protože se jedná o nebeskou sféru, na které tyto fluktuace pozorujeme.

V roce 2001 byla vypuštěna sonda *WMAP* (*Wilkinson Microwave Anisotropy Probe*). Tato sonda už měla úhlové rozlišení 0,3 stupňů, což je již dostatečné pro frekvenční analýzu, která byla provedena v roce 2003. Později v roce 2009 startovala evropská sonda *Planck*, která už měla úhlové rozlišení 0,17 stupňů a teplotní rozlišení vyšší než předchozí sondy. Sonda *WMAP* tedy proměřovala *reliktní záření* celé oblohy v páslech širokých 15 stupňů. Ze získaných dat se musely odečíst ostatní zdroje mikrovlnného záření, kterých je nespočet, protože v mikrovlnném oboru se nenachází jenom *reliktní záření*, ale září v něm také prach a plyn v Mléčné dráze, mnoho extragalaktických objektů, všudypřítomné volné *elektrony*, různé srážkové procesy a podobně. Ukázalo se, že vlnová délka *reliktního záření* má maximum kolem 1 mm, proto byly sondy *COBE*, *WMAP* a *Planck* nejvíce přesné na této vlnové délce. *WMAP* měla 5 frekvenčních pásem, což umožnilo odečíst známé zdroje, jako je záření prachu a podobně. Pokud máme závislost intenzity na vlnové délce změřenou alespoň v těchto 5 frekvenčních pásmech, tak dokážeme zjistit zdroj a případně jej odečíst. 11. února 2003 byla svolána mimořádná tisková konference, na které byly zveřejněny výsledky z *WMAP* a frekvenční analýza, která byla tak zásadní, že naprosto změnila naše znalosti o kosmologii. Den předtím ještě nikdo nevěděl, jak je vesmír starý (odhady byly mezi 9 až 25 miliardami roků). Díky *WMAP* jsme se dozvěděli, že vesmír je starý $13,7 \pm 0,3$ miliardy roků. Dále to zpřesnila sonda *Planck* na $13,8 \pm 0,1$ miliardy roků. Čili poprvé jsme se dozvěděli stáří vesmíru, poprvé bylo změřeno procentuální zastoupení látky, *temné hmoty*, *temné energie*. Z polarizace *reliktního záření* bylo utčeno stáří hvězd a ukázalo se, že první hvězdy vznikaly někdy kolem 400 milionů roků, což potom opět zpřesnila sonda *Planck* na 550 milionů roků.

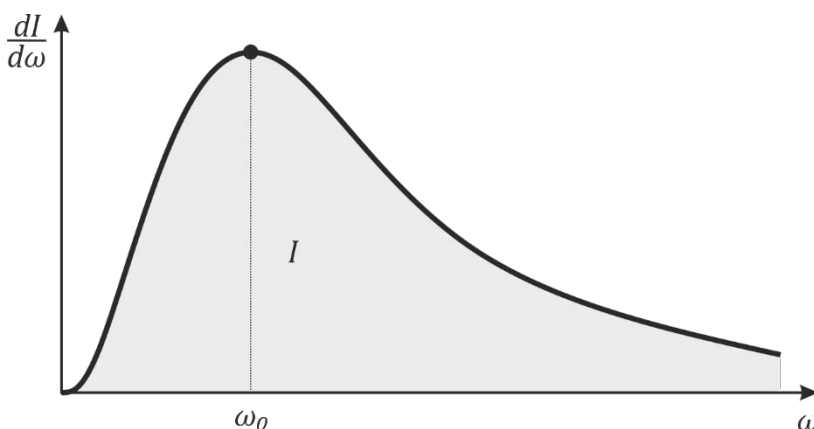
Sonda *Planck* startovala 14. května 2009. Pracovala v 9 pásmech od 30 do 857 GHz. Zde jsou výsledky frekvenční analýzy:

Stáří vesmíru	$13,8 \cdot 10^9$ let
Konec <i>Velkého třesku</i>	380 000 let
První hvězdy	550 milionů let
<i>Hubbleova konstanta</i>	67 km/s/Mpc
Množství atomární látky	5 %
Množství <i>temné hmoty</i>	27 %
Množství <i>temné energie</i>	68 %

Sonda *Planck* určuje vznik hvězd z polarizace *reliktního záření*. Jak už víme, začátek vesmíru byl plazmatický. Tato plazmatická éra končí vznikem atomárních obalů, končí *Velký třesk* a uvolňuje se *reliktní záření*. Dále následuje *temný věk*, kde se celkem nic moc neděje až do doby, kdy vznikají první hvězdy, které opět svým svitem ionizují okolní prostředí, následkem čehož vznikají opět volné *elektrony*. A právě tyto volné *elektrony* polarizují *reliktní záření*. Čili tyto sondy zjišťují vznik prvních hvězd z polarizace *reliktního záření*. Jenomže první hvězdy polarizovali *reliktní záření* v době, kdy už jich bylo hodně. Takže v této době již existuje masivní populace první generace hvězd. Pokud bychom chtěli opravdu zjistit, kdy se tady objevily ty skutečně první hvězdy, tak to nemůžeme dělat z polarizace *reliktního záření*, ale musíme to dělat z vlnové délky 21 cm, což je čára neutrálního vodíku. Neutrální vodík má v jádře *proton* a v obalu *elektron*, a pokud *proton* s *elektronem* mají souhlasné spiny, tak mají jinou energii, než když je mají nesouhlasné. A mezi tím je energetický rozdíl odpovídající vlnové délce 21 cm. Na této vlně svítí kdejaká mlhovina, a proto se využívá k monitorování mlhovin. Když se objevili ty skutečně první hvězdy, tak předtím, než ionizovaly okolí, jej excitovaly a přitom by měla být patrná čára 21 cm. Dlouhá desetiletí ji hledala celá řada experimentálních skupin a žádné se to nedařilo, protože všechny hledaly špatně. Až donedávna. Čára 21 cm se totiž od doby prvních hvězd posunula na vlnovou délku 4 m. Mělo se tedy hledat na této vlnové délce. Byla zaznamenána v Austrálii zaměstnancem MIT. Ukázalo se, že ty úplně první hvězdy vznikaly jednotlivě už 180 milionů roků po *Velkém třesku*. Ale teprve, když jich bylo hodně (až po těch 550 milionech let), se to podepsalo na polarizaci *reliktního záření*, což ukazují výsledky ze sondy *Planck*.

4.3 Planckův vyzařovací zákon

Planckův vyzařovací zákon vyjadřuje závislost intenzity záření absolutně *černého tělesa* na frekvenci ω . Intenzitu záření I o frekvenci ω je třeba chápat tak, že spektrum je rozděleno na nekonečně malé a stejně velké intervaly frekvencí a intenzita záření I o frekvenci ω pak znamená intenzitu záření o frekvencích z intervalu, který obsahuje frekvenci ω . Na konci 19. století bylo experimentálně velmi dobře známo, že intenzita záření *absolutně černého tělesa* v závislosti na frekvenci nejprve roste, dosáhne maxima a pak klesá. Existuje tedy nějaké maximum intenzity při frekvenci ω_0 :

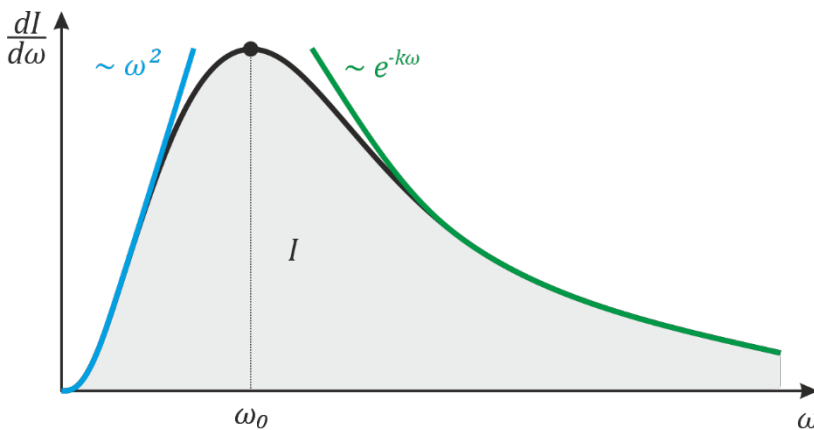


$$[\omega] = \frac{1}{s} \quad ; \quad [I] = \frac{J}{s \cdot m^2}$$

Co je to vlastně *černé těleso*? Je to oblast, v níž je záření lokalizováno v objemu nikoli na povrchu. Jestliže máme nějaký objem a jeho hranici, tak energie záření lokalizovaná v tomto objemu je podstatně větší než na jeho hranici. Například *fotony* ve slunečním jádru postupně difundují, a pokud se dostanou k povrchu, tak vyletí ven. Je to typická situace pro *černé těleso*, protože *fotony* jsou vázány na objem a pokud se nějaký dostane k povrchu a unikne, jedná se o náhodný proces a je jich tedy zanedbatelné množství oproti tomu, co se nachází v objemu.

Dalším příkladem je koule, která je uvnitř zrcadlem. Uvnitř jsou *fotony* odrážející se od stěny koule. Je to sice jiný mechanismus, než ve Slunci, ale *fotony* jsou tam také uvězněné a nemohou se dostat ven. Do koule pak vyvrtáme malý otvor, kterým občas nějaký *foton* vyletí ven. Rovněž se jedná o *černé těleso*, protože *fotony* jsou drženy uvnitř a ven vyletí náhodně přes otvor pouze malá část. Říkáme *černé těleso* proto, že zvenku je to černá koule. V ní je sice záření, ale není vidět. Pouze náhodně z ní vyletí nějaký *foton* ven. Takže *černé těleso* je vlastně objekt, který má záření vázáno na objem, nikoli na povrch, kde je ho zanedbatelné množství.

Každé těleso je v podstatě *černým tělesem*. Všechna mají v sobě nějaké záření, které tu a tam jde povrchem ven. Křivka záření *černého tělesa* byla v 19. století experimentálně známa a byly činěny mnohé pokusy ji spočítat. Teoreticky se podařilo odvodit stoupající část křivky, která je úměrná ω^2 (pro nízké frekvence) a klesající část křivky, která ubývá exponenciálně a je úměrná $e^{-k\omega}$ (pro vysoké frekvence), ale nikomu se nedařilo odvodit celou křivku.



Až v roce 1900 přišel Max Planck a experimentálně si sestavil křivku tak, jak by měla vypadat. Protože chtěl, aby mu to dalo v limitě uvedené dvě závislosti, přišel s následující úvahou:

$$\frac{dI}{d\omega} \sim \frac{\omega^3}{e^{k\omega} - 1} \begin{cases} \sim \frac{\omega^3}{1 + k\omega - 1} \sim \omega^2 & ; \quad e^{k\omega} = 1 + k\omega + \dots \quad (\text{pro nízké frekvence}) \\ \sim e^{-k\omega} & (\text{pro vysoké frekvence}) \end{cases}$$

Tato funkce splňuje obě limity, které byly známy z experimentů. Pro nízké frekvence můžeme funkci $e^{k\omega}$ rozvinout na $1 + k\omega$, což jsou první dva členy Taylorova rozvoje dané funkce, takže po úpravě vidíme, že celý výraz je úměrný ω^2 . Pro vysoké frekvence naprosto dominuje člen ve jmenovateli $e^{k\omega}$, takže celý výraz se chová jako $e^{-k\omega}$.

Max Planck se pak snažil křivku najít teoreticky a dospěl k integrálu, který neuměl vypočítat. Tak jej nahradil sumou, což znamená, že spojitou energii rozdělil na kousky. Zavedl uměle první kvantování, ve kterém energie *fotonů* je jakýsi n -násobek *Planckovy konstanty* a frekvence, přičemž existuje základní energetické kvantum dané výrazem $E_0 = \hbar\omega$:

$$E = n\hbar\omega = nE_0 \quad ; \quad E_0 = \hbar\omega$$

Tímto se mu podařilo vysvětlit zákon záření. Zabil tím dvě mouchy jednou ranou, protože odvodil správnou formuli pro vyzařovací zákon teoreticky a nechtěně zavedl kvantování energie, čímž odstartoval éru kvantové teorie. Napišme nyní *Planckův vyzařovací zákon* přesně i s konstantami:

$$\frac{dI}{d\omega} = A \frac{\omega^3}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B\mathcal{T}}} - 1} \quad (43)$$

Tato formule dává limitně pro malé a velké frekvence to, co bylo známo z experimentů. Odvodíme si z ní dva deriváty. Prvním je intenzita vyzařování na všech frekvencích a druhým je frekvence maxima vyzařování:

(1) Intenzita vyzařování na všech frekvencích

Čili výraz musíme integrovat přes všechny frekvence ω a úhly Ω , protože z povrchu vychází záření pod různými úhly. Jedná se tedy o dvourozměrný integrál:

$$\begin{aligned} I &= \iint \frac{dI}{d\omega} d\omega d\Omega = \iint A \frac{\omega^3}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B\mathcal{T}}} - 1} d\omega d\Omega = \left[\begin{array}{l} \xi \equiv \frac{\hbar\omega}{k_B\mathcal{T}} \Rightarrow \omega = \frac{k_B\mathcal{T}}{\hbar} \xi \\ d\xi \equiv \frac{\hbar}{k_B\mathcal{T}} d\omega \Rightarrow d\omega = \frac{k_B\mathcal{T}}{\hbar} d\xi \end{array} \right] \\ &= A \iint \frac{k_B^3 \mathcal{T}^3}{\hbar^3} \xi^3 \frac{k_B\mathcal{T}}{\hbar} d\xi d\Omega = C\mathcal{T}^4 \int \left(\int_0^\infty \frac{\xi^3}{e^\xi - 1} d\xi \right) d\Omega = C\mathcal{T}^4 \cdot \text{konst} = \sigma\mathcal{T}^4 \end{aligned}$$

Čili integrací *Planckova zákona* dostaneme výsledek, který říká, že intenzita vyzařování je nesmírně citlivá na teplotu. Konstanta σ se nazývá Stefanova-Boltzmannova konstanta. Celková intenzita vyzařování je tedy:

$$I = \sigma\mathcal{T}^4 \quad ; \quad [I] = \frac{\text{J}}{\text{s} \cdot \text{m}^2} = \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \quad ; \quad \sigma = 5,670374419 \dots \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4} \quad (44)$$

(2) Frekvence maxima vyzařování

Jak víme z matematiky, extrém funkce nalezneme, když její první derivaci položíme rovnu nule. Vezměme si *Planckův vyzařovací zákon*, derivujme jej podle omega a pokusme se najít extrém:

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\omega} &= A \frac{\omega^3}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B\mathcal{T}}} - 1} \\ \frac{d}{d\omega} \left(\frac{dI}{d\omega} \right) &= \frac{d}{d\omega} \left(A \frac{\omega^3}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B\mathcal{T}}} - 1} \right) = \frac{d}{d\omega} \left(\frac{\omega^3}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B\mathcal{T}}} - 1} \right) = 0 \\ \frac{3\omega^2 \left(e^{\frac{\hbar\omega}{k_B\mathcal{T}}} - 1 \right) - \omega^3 \frac{\hbar}{k_B\mathcal{T}} e^{\frac{\hbar\omega}{k_B\mathcal{T}}}}{\left(e^{\frac{\hbar\omega}{k_B\mathcal{T}}} - 1 \right)^2} &= 0 \\ 3\omega^2 \left(e^{\frac{\hbar\omega}{k_B\mathcal{T}}} - 1 \right) - \omega^3 \frac{\hbar}{k_B\mathcal{T}} e^{\frac{\hbar\omega}{k_B\mathcal{T}}} &= 0 \end{aligned}$$

Pro $\omega = 0$ má rovnice řešení, které ale nehledáme. Hledáme řešení pro $\omega \neq 0$. Proto celou rovnici vydělíme ω^2 a dostáváme:

$$3 \left(e^{\frac{\hbar\omega}{k_B\mathcal{T}}} - 1 \right) - \frac{\hbar\omega}{k_B\mathcal{T}} e^{\frac{\hbar\omega}{k_B\mathcal{T}}} = 0$$

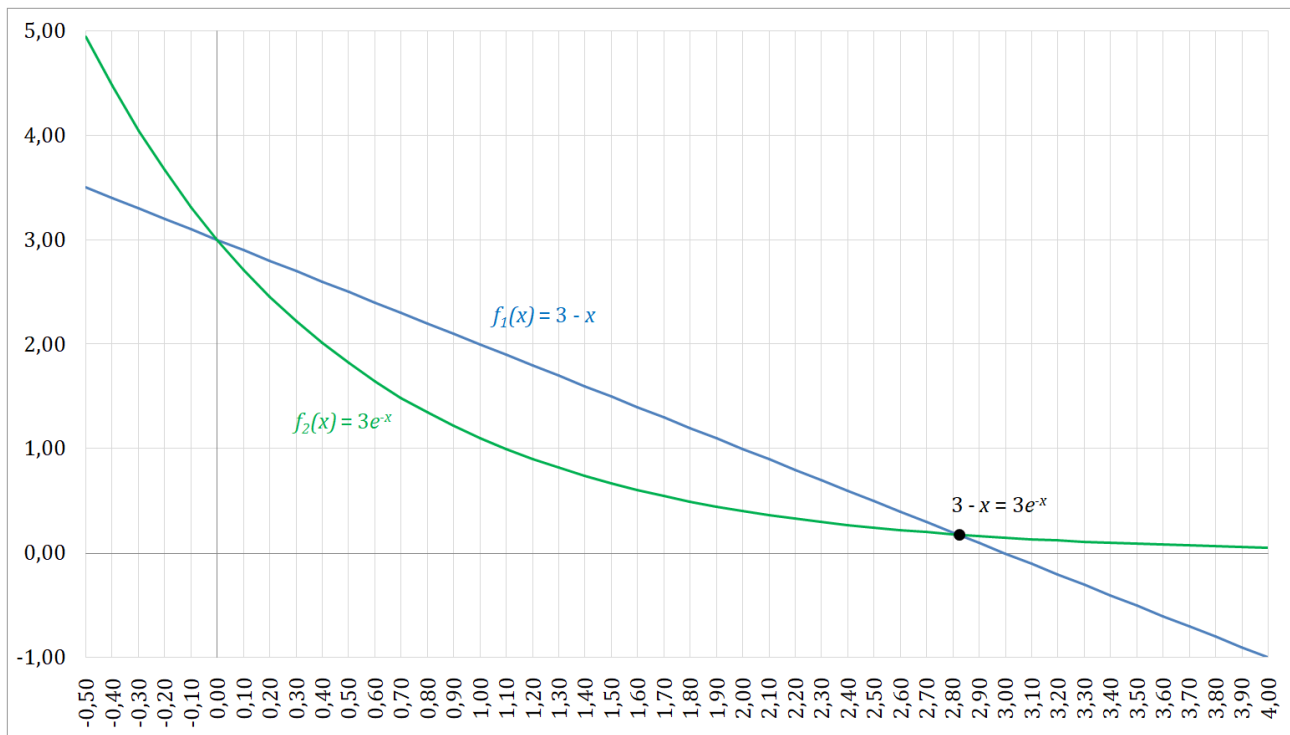
$$3(e^x - 1) - xe^x = 0 \quad ; \quad x = \frac{\hbar\omega}{k_B\mathcal{T}}$$

$$3(e^x - 1) = xe^x$$

$$3 - 3e^{-x} = x$$

$$3 - x = 3e^{-x} \tag{45}$$

Je to takzvaná *transcendentní rovnice*, která nemá analytické řešení. Pokusíme se tedy o grafické řešení. Označme levou stranu rovnice jako funkci $f_1(x)$ a pravou stranu rovnice jako funkci $f_2(x)$. Hledáme tedy x , při kterém platí $f_1(x) = f_2(x)$:



Z obou funkcí $f_1(x)$ a $f_2(x)$ můžeme určit průsečík x_0 a následně i úhlovou frekvenci ω_0 :

$$\frac{\hbar\omega_0}{k_B\mathcal{T}} = x_0 = 2,82 \dots \Rightarrow \omega_0 = \frac{k_B x_0 \mathcal{T}}{\hbar} = \alpha \mathcal{T}$$

$$\omega_0 = \alpha \mathcal{T} \quad ; \quad \alpha = \frac{k_B x_0}{\hbar} \tag{46}$$

Z výrazu je zřejmé, že čím je těleso teplejší, tím září na vyšších frekvencích. Například horké hvězdy jsou modré, chladnější hvězdy jsou červené. Ukažme to na vlnové délce:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi c}{\lambda_0} = \frac{2\pi c}{\lambda_0} \Rightarrow \lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega_0} = \frac{2\pi c}{\alpha \mathcal{T}} = \frac{b}{\mathcal{T}} \quad ; \quad b = \frac{2\pi c}{\alpha}$$

Kde ω_0 je úhlová frekvence maxima vyzařování a λ_0 je vlnová délka maxima vyzařování. Tomuto výrazu se říká *Wienův posunovací zákon*:

$$\lambda_0 = \frac{b}{\mathcal{T}} \quad ; \quad b = 0,00289 \text{ K} \cdot \text{m} \tag{47}$$

4.3.1 Příklad: Vyzařování Slunce

Experimentálně můžeme určit vlnovou délku, na které Slunce září nejvíce, což je $\lambda_0 \approx 500$ nm. Stačí změřit spektrum slunečního záření. Z výrazu (47) jsme pak schopni okamžitě spočítat teplotu Slunce:

$$\mathcal{T} = \frac{b}{\lambda_0} = \frac{0,00289 \text{ K} \cdot \text{m}}{500 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = 5\,780 \text{ K}$$

Což je velmi zajímavé, protože skutečně stačí znát vlnovou délku záření a okamžitě víme, jaká je teplota povrchu. S využitím vztahu (44) pak můžeme dále spočítat také výkon:

$$P = I \cdot S_{\odot} = \sigma \mathcal{T}^4 \cdot 4\pi R_{\odot}^2 \cong 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 5\,800^4 \cdot 4\pi \cdot 700\,000\,000^2 \cong 3,95 \cdot 10^{26} \text{ W}$$

Dále můžeme spočítat výkon Slunce na jednotku plochy ve vzdálenosti naší Země, což je intenzita dopadajícího slunečního záření ve vzdálenosti Země:

$$I = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi R^2} \cong \frac{3,95 \cdot 10^{26}}{4\pi(150 \cdot 10^9)^2} \cong 1\,397 \text{ W/m}^2$$

4.3.2 Příklad: Vyzařování člověka

Teplota člověka je přibližně 310 K. Spočítejme vlnovou délku, na které září nejvíce:

$$\lambda_0 = \frac{b}{\mathcal{T}} = \frac{0,00289 \text{ K} \cdot \text{m}}{310 \text{ K}} = 9,32 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

Pokud tedy chceme detekovat člověka díky jeho tepelnému záření, tak čidlo musí být nejcitlivější na vlnovou délku kolem 9 mikrometrů.

4.3.3 Příklad: Mikrovlnné záření pozadí (z konce Velkého třesku)

Družice COBE a sondy WMAP a Planck zjistily, že vlnová délka mikrovlnného záření pozadí (CMB, *Cosmic Microwave Background*) λ_{max} je zhruba 1,06 mm. Z toho můžeme určit teplotu:

$$\mathcal{T} = \frac{b}{\lambda_0} \cong \frac{0,00289 \text{ K} \cdot \text{m}}{1,06 \cdot 10^{-3} \text{ m}} \cong 2,73 \text{ K}$$

Čili, je to ta teplota, která se prezentuje jako teplota *reliktního záření*. Je to teplota odpovídajícího *černého tělesa*, to znamená, jakou teplotu by mělo *černé těleso*, které vyzařuje tepelné záření odpovídající mikrovlnnému záření pozadí. Samozřejmě, že se jedná o současnou teplotu. V minulosti byla jiná.

4.3.4 Příklad: Za jaké teploty má záření hustotu vody

Už víme, že elektromagnetické záření je nositelem energie a hybnosti. Tím, že je nositelem energie, tak mu také odpovídá nějaká hmota, a tím také nějaká hustota hmoty. Otázkou tedy je, při jaké teplotě má záření hustotu jako voda. Než provedeme výpočet, připomeňme si něco ze základních kurzů fyziky. Představme si, že máme nějakou aditivní veličinu A , což je veličina, která roste s počtem částic neboli *extenzivní* veličina. Příkladem aditivní veličiny je hmotnost, náboj, energie, hybnost, teplo a podobně. To jsou entity, které rostou s počtem částic. Na druhé straně *intenzivní* veličiny jsou veličiny, které nerostou s počtem částic jako například elektrické pole, magnetické pole, rychlostní pole a podobně.

Každé aditivní veličině jsme schopni přiřadit 4 zajímavé veličiny, které popisují proudění aditivní veličiny. První je *hustota* aditivní veličiny ρ_A , která je definována jako množství veličiny ΔA v jednotce objemu ΔV :

$$\rho_A \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta V}$$

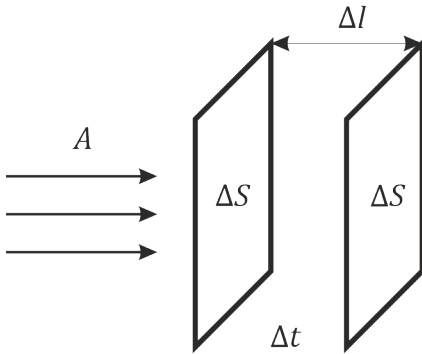
Všichni známe například hustotu hmoty v kilogramech na metr krychlový (kg/m^3) nebo hustotu náboje, kde je jednotkou Coulomb na metr krychlový (C/m^3) nebo hustotu energie, kde je jednotkou Joule na metr krychlový (J/m^3) a podobně. Další vlastností, je *tok* aditivní veličiny $\vec{\gamma}_A$, který je definován jako hustota aditivní veličiny ρ_A násobená rychlostí proudění \vec{u} :

$$\vec{\gamma}_A \equiv \rho_A \vec{u}$$

Tyto veličiny dohromady splňují rovnici kontinuity. Protože rovnice kontinuity je relativistická, znamená to, že tyto 4 veličiny tvoří *relativistický čtyřvektor*, který se transformuje *Lorentzovou transformací*:

$$\begin{pmatrix} \rho_A \\ \vec{\gamma}_A \end{pmatrix}$$

Takže můžeme snadno přecházet od jedné souřadnicové soustavy ke druhé. Jaký je význam toku? Jak víme, každý vektor má velikost a směr. Směr představuje směr rychlosti proudění, čili tok míří ve směru proudění. Na obrázku vidíme tok veličiny A procházející kolmou plochou ΔS , kdy za jednotku času Δt urazí dráhu Δl :



Směr je tedy jasný. Velikost aditivní veličiny γ_A pak bude:

$$\gamma_A = \rho_A \cdot u = \frac{\Delta A}{\Delta V} \cdot u = \frac{\Delta A}{\Delta S \cdot \Delta l} \cdot \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{\Delta A}{\Delta S \cdot \Delta t} \quad ; \quad \begin{array}{ll} \text{Hmota} & [\gamma_m] = \text{kg m}^{-2} \text{ s}^{-1} \\ \text{Náboj} & [\gamma_Q] = \text{C m}^{-2} \text{ s}^{-1} = \text{A m}^{-2} \text{ (proudová hustota)} \\ \text{Energie} & [\gamma_E] = \text{J m}^{-2} \text{ s}^{-1} = \text{W m}^{-2} \text{ (intenzita [I])} \end{array}$$

Význam toku je tedy množství veličiny prošlé jednotkovou plochou za jednotku času. V případě energie je tokem intenzita, která splňuje již uvedený vztah (44) $I = \sigma \mathcal{T}^4$ odvozený z Planckova vyzařovacího zákona (43) tím, že jsme ho integrovali přes všechny frekvence a úhly. To je vše, co potřebujeme vědět k řešení příkladu. Vyjdeme tedy z Einsteinova vzorce pro ekvivalenci hmoty a energie:

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2$$

$$\rho_E = \rho_m \cdot c^2 \quad ; \quad \rho_E = \frac{\Delta E}{\Delta V} \quad , \quad \rho_m = \frac{\Delta m}{\Delta V} \quad , \quad I = \gamma_E = \rho_E \cdot c \Rightarrow \rho_E = \frac{I}{c}$$

$$\frac{I}{c} = \rho_m \cdot c^2 \quad ; \quad I = \sigma \mathcal{T}^4$$

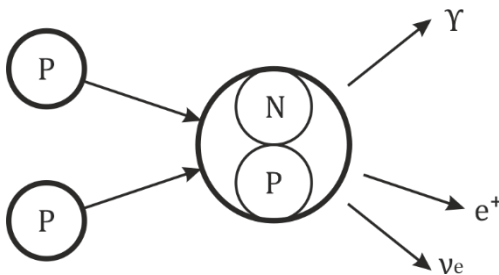
$$\frac{\sigma \mathcal{T}^4}{c} = \rho_m \cdot c^2$$

$$\rho_m = \frac{\sigma \mathcal{T}^4}{c^3}, \quad \mathcal{T} = \sqrt[4]{\frac{\rho_m c^3}{\sigma}} \quad (48)$$

Takže budu-li znát teplotu \mathcal{T} , mohu vypočítat hustotu hmoty ρ_m ; budu-li znát hustotu látky ρ_m , mohu vypočítat teplotu \mathcal{T} . Víme, že chceme mít elektromagnetické záření husté jako voda, takže dosadíme za hustotu hmoty hustotu vody, což je $\rho_m = 1 \text{ g/cm}^3 = 1000 \text{ kg/m}^3$:

$$\mathcal{T} = \sqrt[4]{\frac{\rho_m c^3}{\sigma}} \cong \sqrt[4]{\frac{1000 \cdot 299\,792\,458^3}{5,670374419 \cdot 10^{-8}}} \cong 830\,257\,090 \text{ K} \cong 10^9 \text{ K}$$

Teplota elektromagnetického záření s hustotou vody je asi miliarda kelvinů, což není zas tak moc, protože při zrodu vesmíru existovaly mnohem vyšší teploty (až 10^{30} kelvinů). V tomto příkladu se jedná už o velice pozdní éru našeho vesmíru a tyto teploty měl vesmír řádově v minutách (v čase od 1 do 10 minut). V těchto minutách ovšem probíhal docela zajímavý proces. Probíhalo slučování *protonů* a *neutronů* do větších celků. Vytvářela se lehká atomová jádra, což je proces, který se většinou zobrazuje tak, že letí *proton*, potká se s jiným *protonem* a zfúzí, vznikne jádro deuteria (deuteron) obsahující jeden *neutron* a jeden *proton*, z toho vyletí *pozitron*, *elektronové neutrino* a *foton* (energie):



Ve skutečnosti to není tak jednoduché. Za prvé, tento proces probíhá *slabou interakcí*, takže je velmi pomalý a jenom málo *protonů* zfúzí na tuto dvojici; a za druhé, neletí volným prostorem, ale prodírají se elektromagnetickým zářením s hustotou vody, protože v době, kdy vznikala lehká atomová jádra, mělo záření tuto hustotu. Čili vesmír byl pro *protony* obtížně průchozí.

4.3.5 Příklad: Poměr látky a záření ve vesmíru v závislosti na teplotě

Na začátku bychom měli vědět, že ve vesmíru je obsažena asi miliarda *fotonů* na tři *nukleony* (10^9 *fotonů* / 3 *nukleony*), což je důsledek anihilačních procesů. *Nukleony* jsou částice jádra (*protony* a *neutrony*). Chceme zjistit podíl množství látky k množství záření. Můžeme to vzít třeba z hlediska energie (poměr energie *protonů* ΔE_p k energii *fotonů* ΔE_f). Poznamenejme, že hmotnost *protonu* a *neutronu* je přibližně stejná, proto ve výpočtu použijeme například pouze hmotnost *protonu*:

$$x = \frac{\Delta E_p}{\Delta E_f} = \frac{3 \cdot m_p c^2}{10^9 \cdot \hbar \omega_0} = \frac{3 m_p c^2}{10^9 \cdot \hbar \frac{2\pi \cdot c}{T_0}} = \frac{3 m_p c^2}{10^9 \cdot \hbar \frac{2\pi c}{\lambda_0}} = \left| \lambda_0 = \frac{b}{\mathcal{T}} \right| = \frac{3 m_p c^2 b}{10^9 \cdot 2\pi \hbar c \mathcal{T}} = \frac{3 m_p c b}{10^9 \cdot 2\pi \hbar \mathcal{T}}$$

$$\cong \frac{3 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 299\,792\,458 \cdot 0,00289}{10^9 \cdot 2\pi \cdot 1,05 \cdot 10^{-34} \cdot \mathcal{T}}$$

Určili jsme tedy závislost poměru x látky a záření na teplotě \mathcal{T} . Zajímavou otázkou je, za jaké teploty bylo ve vesmíru stejné množství látky a záření. Znamená to poměr $x = 1$. Úpravou dostáváme:

$$1 \cong \frac{3 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 299\,792\,458 \cdot 0,00289}{10^9 \cdot 2\pi \cdot 1,05 \cdot 10^{-34} \cdot \mathcal{T}} \Rightarrow \mathcal{T} \cong \frac{3 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 299\,792\,458 \cdot 0,00289}{10^9 \cdot 2\pi \cdot 1,05 \cdot 10^{-34}} = 6\,579 \text{ K}$$

Což je teplota konce *Velkého třesku*, kdy končí éra záření a začíná éra látky. Tedy na konci *Velkého třesku* byla ve vesmíru teplota podobná teplotě povrchu Slunce a vesmír zářil ve viditelném oboru elektromagnetického spektra. Jak vesmír dále expandoval a zvětšoval svůj objem, prodlužovala se vlnová délka tohoto záření na dnešní vlnovou délku zhruba 1 mm, na které se nachází maximální intenzita *reliktního záření*.

5. OD MIKROSEKUNDY PO KONEC VELKÉHO TŘESKU

- 5.1 Vznik neutronů a protonů (hadronů) z kvarků a gluonů (kvark-gluonového plazmatu)
- 5.2 Oddělení neutrin od látky
- 5.3 Vznik lehkých jader (primární nukleosyntéza)
- 5.4 Oddělení záření od látky

5.1 Vznik neutronů a protonů (hadronů) z kvarků a gluonů (kvark-gluonového plazmatu)

Na počátku existovala ve vesmíru zárodečná plazmatická „polévka“ které říkáme *kvark-gluonové plazma*. Z této „polévky“ se v čase přibližně jedna mikrosekunda tvořily *neutrony* a *protony*, což jsou obecně částice složené z *kvarků* a kterým říkáme *hadrony*. Takže v čase 10^{-6} sekundy dochází k procesu, kterému se říká *hadronizace látky* (vznik *neutronů* a *protonů* z *kvarků* a *gluonů*). Tento proces kulminuje zhruba v deseti mikrosekundách. Tuto éru dnes dokážeme zopakovat na největších urychlovačích.

5.1.1 Elementární částice

Elementární částice jsou dvojího druhu:

- (a) kvarky a leptony
- (b) síly

Poznamenejme, že elementární částice jsou nelokální objekty. Jsou to objekty mikrosvěta, které se chovají odlišně, než jsme zvyklí z věcí v makrosvětě. Elementární částice není bodový objekt, to znamená, že není lokalizovaná na jednom místě. Na obrázku vidíme tabulku elementárních částic a základní názvosloví:

KVARKY	down d dolů	strange s podivný	bottom/beauty b spodní/krásný	γ foton	POLNÍ ČÁSTICE
	up u nahoru	charm c působný	top/truth t horní/pravdivý	g gluony	
LEPTONY	e elektron	μ mion	τ tauon	Z,W bosony Z, W	
	ν_e e neutrino	ν_μ μ neutrino	ν_τ τ neutrino	H Higgs	
	I.	II.	III.		

5.1.1.1 Leptony (elektrony a neutrina)

Elektron je první objevená elementární částice, kterou v roce 1897 objevil Joseph John Thomson (1856 - 1940) při studiu elektrické vodivosti plynů v katodovém záření. Je to částice, která do vzdálenosti cca 10^{-18} m, kam dnes sahají naše možnosti, nejeví žádnou vnitřní strukturu, proto by mohla být tou skutečně elementární (dále nedělitelnou) částicí. Jeho náboj je $q = -e = -1,602176634 \cdot 10^{-19}$ C přesně. Je to náboj, který pozorujeme z „velké vzdálenosti“ od něj. Pokud budeme příliš blízko, řádově 10^{-15} až 10^{-17} m, což je dosah *silné* a *slabé* interakce, bude mít náboj jiný, protože se tam nachází

různé páry částic a antičástic kvantového vakua, které *elektron* stíní. Čili náboj, který se udává, je náboj, jak ho vnímáme, když se k *elektronu* „nepřiblížíme“. Jeho klidová hmotnost je $9,1093837015(28) \cdot 10^{-31}$ kg. *Elektron* byl poprvé popsán kvantovou teorií v roce 1928 pomocí Diracovy rovnice, ze které vyplynulo, že by měla existovat také antičástice k *elektronu*, kterou je *pozitron*. Ten objevil v roce 1932 Carl David Anderson (1905 - 1991) v produktech kosmického záření, což jsou energetické částice (*protony* přibližně 85 %, jádra hélia 10 %, *elektrony*, jádra jiných atomů a další elementární částice 5 %) přilétající k nám ze vzdáleného vesmíru, které interagují s horními vrstvami atmosféry ve výšce 15 až 40 km. Při těchto srážkách vznikají sekundární spršky mnoha elementárních částic, mezi kterými se nachází ve velkém množství *elektrony*, ale i *pozitrony*. Carl Anderson, který pozoroval tyto „elektrony“ v klasické bublinkové komoře, si všimnul, že se mu některé z nich v magnetickém poli zakřívují na druhou stranu, než by měly. Napadlo ho, že by to mohly být *pozitrony* předpovězené v roce 1928 Diracem. Proto komoru přepažil destičkou z olova o tloušťce 6 mm, což odpovídá přesně definované ztrátě energie pro tyto „elektrony“; „elektron“, který proletěl deskou, ztratil energii, čímž měl dráhu s jiným poloměrem křivosti než před deskou; pak změřil oba poloměry zakřivení R_1 , R_2 ; ze zakřivení dráhy zjistil, že náboj je kladný a ze ztráty energie a velikosti obou poloměrů určil velikost náboje a hmotnost částice. Náboj byl $q = +e = +1,602 \cdot 10^{-19}$ C a hmotnost byla přesně stejná, jako u *elektronu*. Takže objevil antičástici k *elektronu*. Za tento objev dostal v roce 1936 Nobelovu cenu.

Při stejných experimentech Anderson dále nachází těžký elektron neboli *mion*. Je také bezstrukturní, má stejný náboj a jeho hmotnost je $207 m_e$. Životnost má přibližně $2 \cdot 10^{-6}$ sekundy, což je z hlediska kvantového světa poměrně dlouhá doba. Typický den ve světě elementárních částic je doba, za kterou proletí *foton* atomové jádro, což je zhruba 10^{-23} sekundy. Čili z tohoto hlediska je *mion* neskutečně stabilní a žije neuvěřitelně dlouhou dobu (celé dvě mikrosekundy). Za tuto dobu je schopen se integrovat do atomárního obalu a vytvořit *vodík*, kterému se říká *mionium* a který má v centru jeden *proton*, kolem něhož se místo *elektronu* vyskytuje *mion*, kde celé 2 mikrosekundy může „řádit“.

Miony jsou částice, které také vznikají z kosmického záření ve výšce 15 až 40 km jako *elektrony* a *pozitrony*. Přestože žijí krátce, doletí k povrchu Země, kde na každý metr čtvereční dopadne za minutu přibližně 10 000 *mionů*. Jak vysvětlit, že doletí k povrchu, když jejich životnost je kolem 2 mikrosekund? Je to díky efektům *speciální teorie relativity*. *Mion* letí rychlostí zhruba $0,9998 c$, takže jeho místní čas t_μ běží jinou rychlostí, než čas pozemského pozorovatele t . Spočítejme si to:

(a) Z pohledu pozemského pozorovatele

Z pohledu soustavy pozemského pozorovatele dochází k *dilataci času* (odvození výrazu viz *speciální teorie relativity*). Dosadíme tedy do výrazu z *STR* pro *dilataci času* a dostáváme:

$$t = \frac{t_\mu}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{1 - \frac{(0,9998 \cdot c)^2}{c^2}}} = \frac{2 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{1 - \frac{(0,9998)^2 \cdot c^2}{c^2}}} \cong 100 \cdot 10^{-6} \text{ s} = 100 \mu\text{s}$$

Takže 2 mikrosekundy lokálního času soustavy *mionu* odpovídá přibližně 100 mikrosekundám času soustavy pozemského pozorovatele. Za tuto dobu uletí *mion* dráhu:

$$l = v \cdot t \cong 0,9998 \cdot c \cdot t = 0,9998 \cdot 299\,792\,458 \cdot 100 \cdot 10^{-6} \cong 29\,973 \text{ m} \cong 30 \text{ km}$$

Mion má tedy čas doletět k povrchu Země z výšky přibližně do 30 km.

(b) Z pohledu mionu

Z hlediska lokálního běhu času v *inerciální soustavě mionu* dochází ke kontrakci vzdálenosti (odvození výrazu viz *speciální teorie relativity*). Dosadíme tedy do výrazu z *STR* pro *kontrakci délek* a dostáváme:

$$l_{\mu} = l \cdot \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = l \cdot \sqrt{1 - \frac{(0,9998 \cdot c)^2}{c^2}} = 29\,973 \cdot \sqrt{1 - (0,9998)^2} \cong 599,43 \text{ m} \cong 600 \text{ m}$$

Z hlediska *inerciální soustavy mionu* se vzdálenost k povrchu zkrátila přibližně na 600 m.

V roce 1977 se na urychlovači učinil další objev, kterým byl objev supertěžkého elektronu neboli *tauonu*. Jeho hmotnost je $3\,484 m_e$ a životnost přibližně $3 \cdot 10^{-13}$ sekundy. Tyto supertěžké elektrony jsou relativně vzácné. V přírodě se pravděpodobně už nevyskytují. Dokážeme je ale vytvářet uměle. Poznamenejme, že *proton* má klidovou hmotnost $1\,833 m_e$, což znamená, že *tauon* je skoro dvakrát hmotnější, než *proton*. Takže označení těchto částic jako *leptony* („lepto“ znamená lehký) má pouze historický kontext, protože *tauon* z hlediska hmotnosti není vůbec lehkou částicí.

Na počátku, když vznikal vesmír, existovala termodynamická rovnováha mezi těmito typy elektronů. Existovala třetina normálních elektronů, třetina těžkých a třetina supertěžkých. Postupně jak vesmír chladnul, nejdříve vyhynuly supertěžké elektrony (*tauony*), pak v současnosti mají namále těžké elektrony (*miony*), které se vyskytují už pouze tam, kde jsou vysokoenergetické procesy (kosmické záření, okolí *černých děr*, okolí neutronových hvězd), a postupně, až vesmír za několik miliard roků ochladne ještě více, tak vyhynou i *miony* a zůstane jenom první generace (obyčejné *elektrony*), které jsou stabilní.

Existuje otázka, zda pokud bychom měli výkonnější urychlovač, nemůžeme objevit ještě další extra super těžký elektron čtvrté generace. Zdá se, že ne, protože na počátku existovala mezi těmito třemi generacemi částic termodynamická rovnováha, což je rovnováha nejen mezi *elektrony*, ale také mezi *kvarky*, ze kterých jsou tvořeny *neutrony* a *protony*. A pokud by existovala ještě čtvrtá generace částic, tak by dnes existovaly úplně jiné lehké prvky v úplně jiném poměru. Čili poměr lehkých prvků a jak vznikaly, koresponduje přesně s tím, že tady byly právě 3 generace částic. Kdyby existovaly 4 generace, bylo by tady pouze 25 % normálních elektronů, 25 % normálních kvarků a vesmír by vypadal jinak. Čili to, jak vypadá dnes skladba lehkých prvků, je vlastně důkazem, že máme jenom 3 generace částic a 3 druhy elektronů.

Tyto znalosti jsou ukázkou krásného sepětí astronomie obrovských měřítek, kde pozorujeme, jak vypadá náš svět a fyziky elementárních částic, která se provozuje na urychlovačích. Někomu by mohlo přijít divné, že svět astronomie je poměrně blízký světu elementárních částic a urychlovačů, ale divné už to nebude v okamžiku, když si uvědomíme, že když vesmír vznikal, tak byl nesmírně horký a hustý a dominovaly v něm právě procesy srážek elementárních částic. Čili vesmír byl na počátku tím největším urychlovačem stvořený přírodou, který nedokážeme postavit. A pozorovat průběh *Velkého třesku* znamená dívat se také na procesy srážek, které dnes neumíme simulovat.

Když lidé objevili radioaktivitu (nejvíce se týkala *beta rozpadu*, což je rozpad *neutronu* na *proton*, *elektron* a *elektronové antineutrino*), tak se ukázalo, že v těchto rozpadech to z hlediska energie a hybnosti příliš nesedí a že kromě těchto produktů by při *beta rozpadu* měla vzniknout ještě malá neutrální částice, která odnáší energii a hybnost. Existenci této částice navrhnul v roce 1930 Wolfgang Pauli (1900 - 1958). V té době byl známý pouze *proton*, *elektron* a *foton*; ještě nebyl známý *neutron*, což je právě ta částice, která se při *beta rozpadu* rozpadá. V té době byl *beta rozpad* znám, ale jeho původce *neutron* ještě ne. *Neutron* objevil James Chadwick (1891 - 1974) až v roce 1932. Na krátkou dobu se zdálo, že hledaná neutrální částice byla objevena, ale ukázalo se, že tomu tak není. *Neutron* je původce *beta rozpadu*, nikoli jeho produkt. Ukázalo se, že hledaná neutrální částice musí být podstatně menší. Enrico Fermi (1901 - 1954), italský fyzik, výborný experimentátor i teoretik, který přispěl k počátkům kvantové teorie, označil hledanou částici (tím, že byl z Itálie) zdobněle jako *neutrino* (malý neutron). Jeho hledání trvalo do roku 1956, kdy Clyde Cowan (1919 - 1974) a Frederick Reines (1918 - 1998) objevili první *neutrino* v detektoru, který postavili v blízkosti jaderného reaktoru elektrárny v Savannah River. Takže se ukázalo, že koncept byl správný. Později se zjistilo, že *neutrino* vzniká vždy současně v páru s *elektronem* a ve *slabé interakci* se chovají jako částice a antičástice, takže kdekoli vznikne *elektron*, automaticky k němu vzniká *elektronové antineutrino* a kdekoliv vznikne *pozitron*, vznikne

k němu *elektronové neutrino*. Podobně se později ukázalo, že k *mionu* vzniká *mionové neutrino* a k *tauonu* vzniká *tauonové neutrino*.

Neutrina jsou velmi zvláštní částice, protože procházejí úplně vším (Zeměkoulí, Sluncem a podobně). Což je dobře, protože přestože se obtížně zachytávají, díky nim můžeme studovat procesy, na které bychom nedosáhly. Zdrojů *neutrin* je velké množství, například jaderné reaktory, nitro Slunce, odkud máme obrovský tok *neutrin* (na Zemi je to přibližně 60 miliard slunečních *neutrin* na centimetr čtvereční za sekundu), Zemské jádro (*geoneutrina* vznikající radioaktivním rozpadem), všechny ostatní hvězdy (jaderné reakce), supernovy (při explozích odnášejí podstatnou část energie), dále existuje obrovské množství *reliktních neutrin* pocházející z doby kolem 1 sekundy, kdy látka pro *neutrina* zprůhledněla (do 1 sekundy byla *neutrina* vázána na látku podobně jako bylo vázané na látku elektromagnetické záření po dobu 380 000 roků). Takže budeme-li se chtít podívat do kuchyně *Velkého třesku*, musíme umět chytat *reliktní neutrina* (v ideálním případě *reliktní gravitační vlny*). *Neutrina* interagují *slabou interakcí*, která má dosah 10^{-17} m, takže interakce s látkou je velmi nepravděpodobná (je velmi nepravděpodobné, aby se *neutrino* přiblížilo k nějaké částici na vzdálenost, na které by s ní mohlo interagovat). Účinný průřez interakce s běžnou látkou je takový, že člověk chytí za svůj život zhruba jedno *neutrino*. Proto stavíme obrovské detektory *neutrin*. Největší je *Ice Cube* v Antarktidě v ledu, kde jsou navrtané díry o průměru 60 cm a do nich zapaštěné struny s fotonásobiči. Některé *neutrino* občas interaguje a vytvoří rychlý *elektron* (v daném prostředí je *elektron* rychlejší než světlo), jenž táhne za sebou kužel *Čerenkovova záření*, což je elektromagnetická obdoba zvukové rázové vlny, která se dá detekovat fotonásobiči. Objem detektoru *Ice Cube* je 1 km krychlový, což je dost na to, aby se zde zachytilo několik *neutrin* denně a daly se provádět experimenty.

Zajímavou vlastností *neutrin* je jejich oscilace, což znamená, že chvíli letí jako *elektronové neutrino*, pak jako *mionové*, dále jako *tauonové* a stále dokola. Má to pravděpodobností charakteristiku jako vše v kvantovém světě. Proto na začátku, když se chytala sluneční *neutrina*, tak se jich chytala pouze třetina a fyzikům to bylo divné, protože to nesouhlasilo s výpočty. Vypadalo to, že buď nerozumíme tomu, jak vypadá termojaderná syntéza, nebo nám Slunce vyhasíná, což bychom se dověděli až za milión let vzhledem k tomu, že *fotonům* to tvá tak dlouho, než se proderou k povrchu, zatímco v *neutrinech* to vidíme ihned, protože Slunce pro ně nepředstavuje žádnou překážku. *Neutrino* z jeho jaderného kotle doletí k povrchu asi za 2,4 sekundy. Nakonec se ukázalo, že vše je v pořádku, protože detektor byl citlivý na *elektronová neutrina* a cestou od Slunce směrem k nám se to mezitím namíchalo. Oscilace na *tauonová neutrina* je velmi vzácná a poprvé byla detekována 30. května 2010 v detektoru Opera pod horou Gran Sasso v Itálii.

5.1.1.2 Kvarky

Jsou to částice, ze kterých jsou složeny například *neutrony* a *protony*, což se tušilo někdy od roku 1960, protože v té době už bylo známo velké množství „elementárních“ částic, které vykazovaly podobné vlastnosti. Částice byly seskupeny do různých rodin. Mnoha lidem to připomínalo situaci při objevu Mendělejevovy tabulky prvků, kdy se prvky řadily do určitých skupin, které měly společné vlastnosti a z tabulky byla vidět vzájemná souvislost (dnes víme, že to souvisí s elektronovými obaly). Takže v případě *protonů* a *neutronů* se zdálo, že se jedná o složené částice a to, z čeho jsou složené, nám dává ony společné vlastnosti. Celá řada fyziků vymýšlela schémata složených částic. Jedním z nich byl Murray Gell-Mann (1929 - 2019), který v roce 1964 předpověděl existenci *kvarků* a v roce 1969 za to dostal Nobelovu cenu.

Za pravdu mu bylo dáno v roce 1968 na Stanfordově univerzitě, kde byl lineární urychlovač urychlující *elektrony* na vysoké rychlosti. Poznamenejme, že *elektrony* se většinou urychlují v lineárních urychlovačích, protože na kruhové dráze generují synchrotronní záření, čímž ztrácí energii. Ztráta je nepřímou úměrná kvadrátu jejich hmotnosti, takže lehké částice září extrémně a nelze je urychlovat na kruhových drahách. Proto se *elektrony* urychlují na lineárních urychlovačích, kdežto *protony* se mohou urychlovat na LHC (*Large Hadron Collider*) na kruhové dráze bez problému. Ve Stanfordu tedy střídali v lineárním urychlovači vysoce urychlenými *elektrony* do *protonů*. *Elektrony* měly tak vysokou razanci, že pronikaly hluboko do *protonů*, kde se rozptylovaly na třech centrech a bylo tak jasné, že *proton* je složenou částicí. První *kvarky*, které byly objeveny v roce 1968 v *neutronech* a *protonech*, jsou *kvarky*

down (dolů) a *up* (nahoru). *Neutron* a *proton* mají v sobě po třech *kvarcích*. V roce 1969 byly objeveny v kosmickém záření částice, jako jsou například *kaony* a další, které v sobě mají *strange* (podivný) *kvark*. Posléze byl už na urychlovačích objeven *charm* (působivý) *kvark*, *bottom/beauty* (spodní/krásný) *kvark* a *top/truth* (horní/pravdivý) *kvark*. Tato šestice *kvarků* jsou vlastně základními stavebními kameny složitějších složených částic (v našem případě *neutronů* a *protonů*). *Kvarky* se skládají se buď po dvojicích jako *kvark* a *antikvark* (*mezony*), nebo po trojicích jako tři *kvarky* (*baryony*). Oběma těmito skupinám se společně říká *hadrony*. *Hadrony* jsou tedy částice složené z *kvarků*. Základ je tedy dvojice nebo trojice.

Ve vesmíru je *temná hmota*, *temná energie* a *baryonová látka*. Jestliže hovoříme o *baryonové látce*, tak mluvíme o látce složené z atomů. Ty mají jádro složené z *protonů* a *neutronů*, kolem něhož je *elektronový* obal. Hmotnostně dělá atom atomem jeho jádro a jádro je složené z *protonů* a *neutronů*, které jsou složeny ze tří *kvarků*, což jsou *baryony*. Čili baryonová látka je látka složená z *baryonů* a patří mezi nejběžnější atomární látku ve vesmíru. Můžeme tedy baryonovou látku chápat také jako synonymum atomární látky.

5.1.1.3 Polní výměnné částice

Někde na počátku tohoto textu bylo zmíněno, že fyzika měla problém s pojmem *síly*, který se vyřešil ve 20. století jednak obecnou relativitou, kdy gravitaci popisujeme zakřiveným prostorem a časem a kvantovou teorií, kde interakci popisujeme pomocí polních neboli výměnných částic. Polní částice jsou jakýmsi pojivem nebo tmelem, který to vše drží pohromadě.

V případě *elektromagnetické interakce* jsou polními částicemi *fotony*. Hmotu (atomy, molekuly) drží pohromadě *elektromagnetická interakce*. Dosah této interakce je nekonečný v tom smyslu, že ubývá s kvadrátem vzdálenosti, takže když to přenásobíme plochou, do které tato interakce ubývá, dostaneme konstantu.

Silná interakce drží pohromadě *mezony* a *baryony* (dvojice a trojice *kvarků*) pomocí polních výměnných částic, kterým říkáme *gluony* („glue“ znamená v angličtině „lepit“). Toto gluonové pojivo je opět objektem mikrosvěta, čili můžeme mluvit jak o částicích, tak o poli. Toto „lepidlo“ má velmi zajímavou vlastnost. Lepí ve vzdálenosti větší než 10^{-15} m, což je jiné, než u *elektromagnetické interakce*, kdy síla klesá se vzdáleností. Jestliže jsou tedy dva *kvarky* příliš blízko u sebe, tak to vůbec nelepí. Jakmile by se od sebe vzdálily, tak při vzdálenosti 10^{-15} m, což je dosah *silné interakce*, jim v tom *gluony* budou bránit. Když byl vesmír horký, byl vyplněn *kvarky* a *gluony*, které se chovaly jako volné, protože průměrné vzdálenosti byly menší než 10^{-15} m. Této zárodečné „polévce“ vesmíru říkáme *kvark-gluonové plazma*. Jak vesmír expandoval a chladnul, tak se zvětšovaly vzdálenosti a v jednom okamžiku, v čase 1 mikrosekunda od počátku, *gluonové* „lepidlo“ začalo lepit. *Kvarky* se začaly shromažďovat do dvojic a trojic.

Slabá interakce má dosah do vzdálenosti 10^{-17} m a je známá především z *beta rozpadu* ($n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$), ale nejsou to jenom beta rozpady, také rozpad *mionu* je *slabou interakcí* ($\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$) a tak dále. Může to být také konstruktivní, jako například když zfúzíjí dva *protony* na *deuteron* v nitru Slunce. Takže se nemusí jednat pouze o rozpady. Prvním článkem fúzních procesů ve Slunci je *slabá interakce*, která probíhá velmi pomalu. *Neutrína*, která interagují *slabě*, mají tu smůlu, že se musí přiblížit k nějaké částici na vzdálenost 10^{-17} m, aby byly schopni interagovat. Proto je pro ně látka průhledná.

5.1.1.4 Higgsova částice

Higgsova částice je rovněž tmelem vyplňující celý vesmír, která ostatním částicím uděluje hmotnost.

5.2 Oddělení neutrin od látky

Další důležité období je kolem 1 sekundy, kdy se odstartovala celá řada procesů. Teplota už byla relativně nízká, kolem 10 miliard kelvinů. Byly zde již *neutrony* a *protony*, které se vytvořily ze

zárodečné „polévky“, dále *neutrino*, která byla ještě za těchto podmínek relativně „agresivní“, protože interagovala s látkou (*slabou interakcí*). Narážela do *protonů* a *neutronů*, čímž udržovala rovnováhu mezi těmito částicemi tak, že se *neutrony* měnily na *protony* (beta rozpad) a *protony* se měnily na *neutrony*, takže mezi nimi existoval poměr 1:1. Právě touto interakcí s *neutriny* se to neustále vyměňovalo.

V tomto období při této teplotě se energetické poměry změny natolik, že klesl účinný průřez interakce *neutrín* s látkou, vzrostla střední volná dráha *neutrín* a došlo k jejich oddělení od látky. Nastal stav, jaký známe dnes, kdy *neutrino* látkou běžně procházejí.

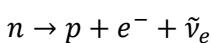
Jak víme, slabá interakce má dosah 10^{-17} až 10^{-18} m. Tomu odpovídají určité energie, protože když srážíme částice, tak čím vyšší energii dodáme, na tím menší vzdálenost se k nim dostaneme. Takže můžeme přepočítat vzdálenost, kterou chceme dosáhnout, na energii. A v tomto období vývoje vesmíru máme právě takové energetické rozpětí, ve kterém *slabá interakce neutrín* může ještě fungovat, a *neutrino* tak mohou interagovat s látkou.

V jedné sekundě tedy dochází k oddělení *neutrín* od látky. Tato *neutrino* nazýváme *reliktní neutrino* podobně, jako tomu bylo v pozdější době 380 tisíc let od počátku, kdy se oddělilo od látky záření, a které nazýváme *reliktním zářením*. Poznamenejme, že celkem těch reliktních máme tři - *reliktní gravitační vlny* (z úplného počátku), *reliktní neutrino* (z období kolem 1 sekundy) a *reliktní fotony* (z období kolem 380 tisíc let).

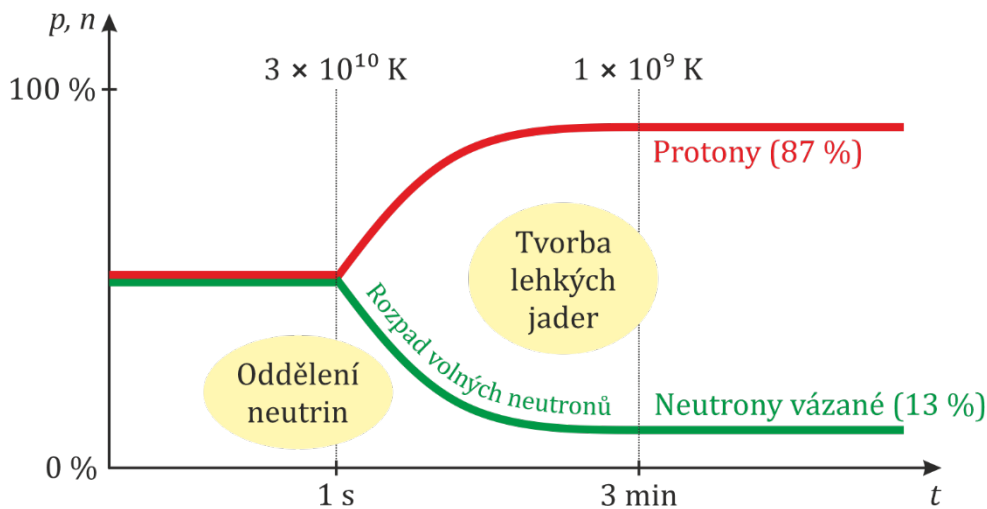
Zachycení *reliktních neutrín* je obrovskou výzvou, protože obsahují informaci, kdy byl vesmír starý pouhou 1 sekundu. Nemáme žádné přímé metody pozorování, protože takto mladý vesmír byl plazmatický a tudíž neprůhledný pro elektromagnetické záření. V elektromagnetickém oboru můžeme pozorovat galaxie a hvězdy vznikající po *Velkém třesku*. Takže hranice použití elektromagnetického záření je závěr *Velkého třesku*, kdy vidíme stěnu fluktuací *reliktního záření*, která je pro nás v elektromagnetickém oboru neprůhledná. Chceme-li tedy nahlédnout do kuchyně *Velkého třesku*, bylo by dobré zachytit *reliktní neutrino*. Dnes mají *reliktní neutrino* teplotu 1,96 kelvinů a nachází se jich přibližně 300 v každém krychlovém centimetru. Protože mají tak nízkou teplotu, mají nízkou energii, a tudíž je dnes nedokážeme zachytit, přestože je jich všude velké množství. Umíme chytat pouze vysokoenergetická *neutrino* ze Slunce, atmosféry, zemského jádra, supernov a podobně.

Poznamenejme, že *reliktní* elektromagnetické záření, které se oddělilo v čase 380 tisíc roků, má nyní teplotu 2,73 kelvinů a *reliktní neutrino*, přestože se oddělila dříve v teplejším vesmíru, mají teplotu pouze 1,96 kelvinů. Jak je to možné? Protože v období 3 až 10 sekund docházelo k anihilacím, kdy anihilace *elektronů* a *pozitronů* uvolnila energii, která ohřála celý vesmír. Znovu ho tedy ohřála asi o 40 procent kromě *neutrín*, která se oddělila od látky v období jedné sekundy. Čili tento ohřev se netýkal *neutrín*, protože již neinteragovala. Proto je jejich teplota nižší, než teplota *reliktního záření*.

To, k čemu došlo v jedné sekundě, mělo obrovské důsledky. *Neutron* je totiž nestabilní částice s poločasem rozpadu zhruba 10 minut, čemuž odpovídá střední dobou života přibližně 14 minut (střední doba života se od poločasu rozpadu liší koeficientem $\sqrt{2}$). Čili po zániku *neutrínové* rovnováhy nemohly zůstat žádné volné *neutrony*. Ty, které existují, jsou vázány v jádru atomu. Čili v tomto období po uvolnění *neutrín*, si musely existující *neutrony* chytit nějaký *proton* a stát se vázanými, což je proces, kterému se říká *nukleogeneze* neboli vznik atomárních jader, který probíhal ve vesmíru řádově v minutách, od 1 do 10 minut. To je proces, kterým se *neutrony* mohly zachránit tím, že se stannou součástí nějakých větších celků. Volný *neutron* do dnešní doby nepřežil žádný. V jedné sekundě se tedy začínají rozpadat *neutrony*. *Neutron* se rozpadá na *proton*, *elektron* a *elektronové antineutrino*:



Takže mizí *neutrony* a roste počet *protonů*. Celé se to saturovalo do stavu, kdy existuje asi 13 % vázaných *neutronů* a 87 % *protonů*:



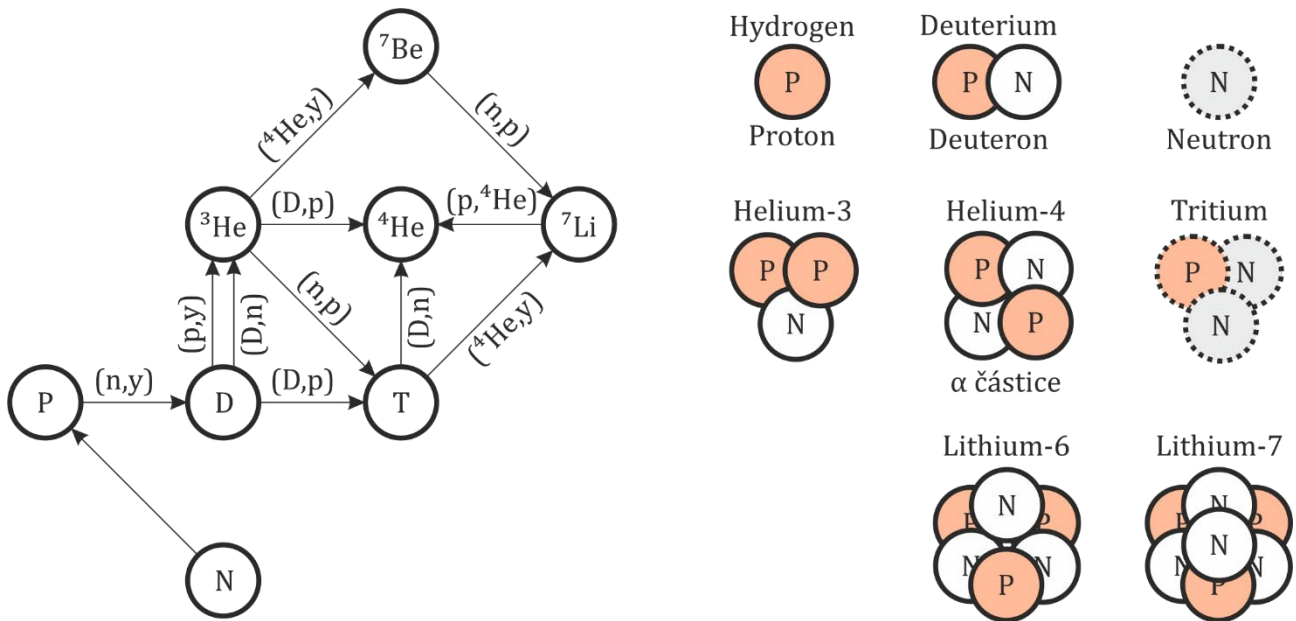
Z vysokoenergetických *neutrin* máme největší tok od slunečních *neutrin* z nitra Slunce, a to přibližně $60 \cdot 10^9 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$. Dále máme *geoneutrina* z radioaktivního rozpadu v nitru Země, *neutrina* z reaktorů, *neutrina* ze supernov, atmosférická *neutrina* vznikající interakcí kosmického záření s horními vrstvami atmosféry a *neutrina* z kvasarů. Co se týče vysokoenergetických *neutrin*, maximum jich přichází ze Slunce v oblasti energie kolem 10^5 eV (elektronvoltů). Naopak *reliktní neutrina* mají maximum výskytu v oblasti energie kolem 10^{-4} eV. Všechna vysokoenergetická *neutrina* umíme zachytávat, ale *reliktní* zatím nikoli.

V období kolem 3 sekund poklesla teplota na $6 \cdot 10^9$ K, čemuž odpovídá energie 500 keV, což je energie srovnatelná s klidovou hmotností *elektronu* ($m_e \cong 511 \text{ keV}$). V tuto chvíli je již vesmír pro *elektrony* chladný a nevznikají tak *elektron-pozitronové* páry, ale naopak *elektrony* a *pozitrony* zanikají tím, že spolu anihilují. Pokud by bylo *elektronů* a *pozitronů* stejně, pak by všechny zanihovaly a dnes by neexistoval žádný *elektron*. Vzhledem k tomu, jak to dnes vypadá, se zdá, že někdy na počátku muselo dojít k narušení symetrie mezi hmotou a antimotou a musela existovat na miliardu antičástic miliarda plus jedna částice. A z těchto částic, které zbyly po anihilaci, je postavena veškerá hmota. To jsou ty zbylé *elektrony*. Tato anihilace způsobila ohřátí vesmíru zhruba o 40 % kromě *neutrin*, které již byly odděleny od látky. Proto má elektromagnetické záření, které se oddělilo od látky později, teplotu vyšší než *neutrina*. Příčiny narušení symetrie 1 : 10^9 se hledají, ale zatím není znám mechanismus.

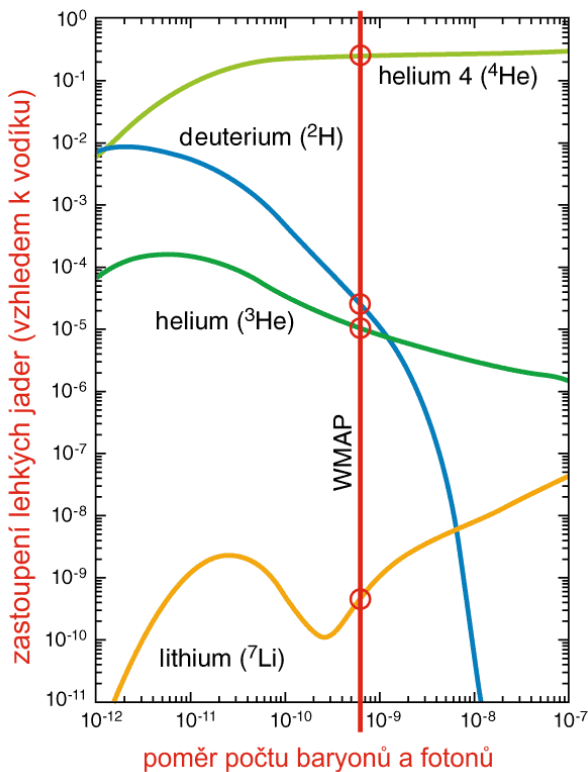
5.3 Vznik lehkých jader (primární nukleosyntéza)

Třetí důležitý proces probíhá řádově v minutách (1 až 10 minut), kdy vznikají lehká jádra. V této době jsou již podmínky natolik dobré, aby se *neutrony* a *protony* mohly slučovat do větších celků. Dříve se také mohl zachytit *neutron* s *protonem*, ale vzápětí byla tato vazba narušena srážkou s jinou částicí. Množství částic a srážek je v časech kratších než minuta tak veliké, že je nemožné, aby se *neutron* sloučil s *protonem* a tato vazba se zachovala. Na druhé straně v časech větších než 10 minut pravděpodobnost sloučení *protonu* s *neutronem* rovněž klesá k nule, protože díky expanzi vesmíru jsou srážky stále méně časté a také dochází *neutrony*, protože jak bylo uvedeno, rychle se rozpadají (jejich střední doba života je přibližně 14 minut).

V této době *primární nukleosyntézy* vznikají pouze lehká atomová jádra jako je *deuteron*, *tritium*, *helium-3*, *helium-4*, *lithium-7*, *beryllium-7*. Nevznikají ještě jejich *elektronové* obaly. Nato je vesmír stále příliš horký:



Všechna ostatní jádra jsou natolik složitá, že v této fázi, kdy není dostatek času, nemohou vzniknout. Složitější prvky vznikají později až v jádrech hvězd postupnou syntézou. Procentuální zastoupení lehkých jader (vzhledem k protonu neboli jádru vodíku), která vznikala v prvních minutách, ukazuje obrázek:



5.4 Oddělení záření od látky

V době kolem 380 000 roků, což je konec *Velkého třesku*, kdy teplota poklesla na zhruba 5 000 kelvinů, probíhá integrace *elektronů* do atomárních obalů, čili vznikají neutrální atomy jako celky, kdy už máme jádra s elektronovými obaly. Poměr záření a látky je právě roven jedné. Končí horké plazmatické období (období záření) a začíná éra neutrálního plynu (období látky). Tím, že mizí volné *elektrony*, záření se už nemá na čem rozptylovat, takže se uvolňuje a vzniká *reliktní záření*, které je svědkem těchto procesů. Čili, se vznikem atomů jako neutrálních celků končí *Velký třesk* a nastává *temný věk*

(éra neutrálního plynu). Znovu se rozsvítí až v době 180 milionů let po začátku, kdy vznikají první hvězdy. Tyto hvězdy ale ještě nedokázaly ionizovat okolní plyn. Hlavní vlna hvězdotvorby přišla v období asi 550 milionů let po začátku, kdy intenzivní ultrafialové záření těchto hvězd ionizovalo okolní prostředí a vesmír se stal opět plazmatický. Takže období od 380 tisíc roků do 550 milionů roků je jediným obdobím, které není plazmatické.

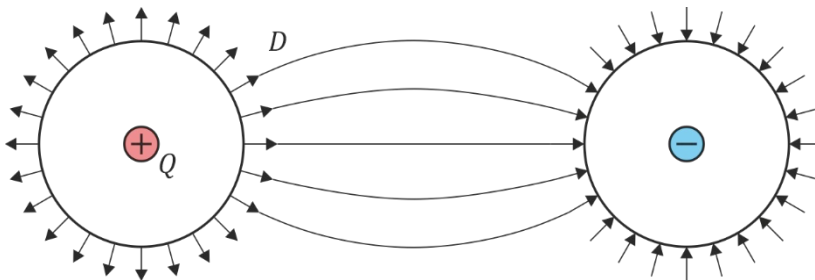
6. ÉRA DIVOKÉHO PLAZMATU

6.1 Maxwellovy rovnice

(1) Gaussův zákon elektrostatiky

Divergence vektoru elektrické indukce \vec{D} je rovna hustotě nábojů ρ_Q , neboli zdrojem elektrických polí jsou náboje; Elektrický indukční tok libovolnou vně orientovanou uzavřenou plochou S je roven celkovému náboji Q v prostorové oblasti V ohraničené plochou S . Diferenciální a integrální tvar tohoto zákona je:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_Q \quad ; \quad \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q \quad \text{kde} \quad Q = \int_V \rho_Q \cdot dV$$



Tento zákon má experimentální prapůvod v *Coulombově zákonu*, který říká, že intenzita elektrického pole E ubývá se čtvercem vzdálenost od náboje:

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}$$

Poznamenejme, že intenzita elektrického pole \vec{E} je síla působící na kladný jednotkový elektrický náboj v elektrickém poli:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q}$$

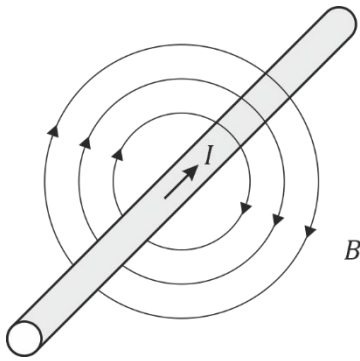
Divergence elektrického pole je nenulová pouze tam, kde jsou náboje. Jako kdyby elektrické pole vyvěralo z míst, kde jsou kladné náboje, a nořilo se do míst, kde jsou záporné náboje.

(2) Gaussův zákon magnetostatiky (zákon spojitosti indukčního toku)

Divergence vektoru magnetické indukce \vec{B} je rovna nule, neboli zdroje magnetického pole neexistují; Magnetický tok libovolnou uzavřenou orientovanou plochou S je roven nule. Diferenciální a integrální tvar tohoto zákona je:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad ; \quad \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Znamená to, že magnetické pole odnikud nevyvěrá a nikam se nenoří. Magnetické pole je pouze průběžné:



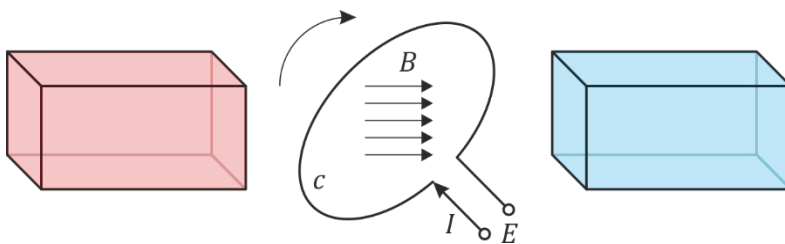
Pro magnetické pole jsou tedy typické různé vírové struktury jako například kolem vodičů, kterými protéká elektrický proud. Neexistují tedy žádné magnetické monopóly, ze kterých by magnetické pole vyvěralo a do kterých by se nořilo.

(3) Faradayův indukční zákon (zákon elektromagnetické indukce)

Rotace vektoru intenzity elektrického pole \vec{E} je rovna záporně vzaté časové změně magnetické indukce \vec{B} , neboli víry elektrického pole vznikají tam, kde se mění magnetické pole s časem; Cirkulace vektoru intenzity elektrického pole \vec{E} po libovolně orientované uzavřené křivce c je rovna záporně vzaté časové změně magnetického indukčního toku procházejícího libovolnou plochou S , kterou křivka c obepíná (křivka c a plocha S jsou vzájemně orientovány pravotočivě). Diferenciální a integrální tvar tohoto zákona je:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad ; \quad \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \text{kde} \quad \Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

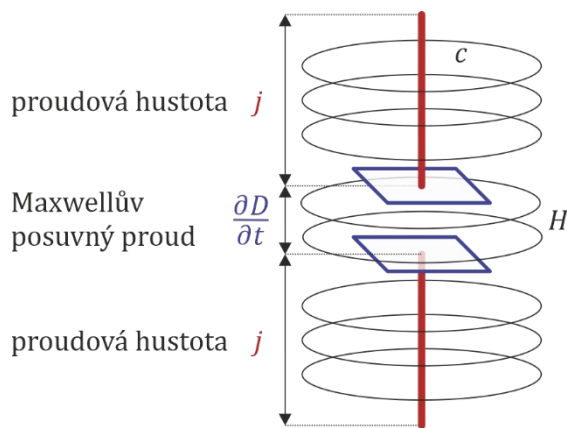
Faradayův zákon elektromagnetické indukce má opět experimentální prapůvod. Na tomto zákonu jsou založeny všechny elektrické točivé stroje, jako jsou motory, generátory a dynama. Jde o princip otáčející se smyčky v magnetickém poli magnetů. Výsledkem je proměnné magnetické pole procházející touto otáčející se smyčkou z vodiče, kde vzniká vír elektrického pole, který vytvoří elektromotorické napětí. Pokud je smyčka uzavřená, pak toto napětí protlačí smyčkou elektrický proud, který vybudí v zájmu zachování energie magnetické pole působící proti změně primárního magnetického pole:



(4) Ampérův zákon (zákon celkového proudu)

Rotace vektoru intenzity magnetického pole \vec{H} je rovna součtu proudové hustoty \vec{j} a hustoty Maxwellova posuvného proudu (časové změny elektrické indukce $\partial \vec{D} / \partial t$), neboli vír magnetického pole vznikne tam, kde teče elektrický proud nebo se mění elektrické pole s časem; Cirkulace vektoru intenzity magnetického pole \vec{H} po libovolně orientované uzavřené křivce c je rovna součtu celkového vodivého proudu I a posuvného proudu $d\Psi/dt$, kde Ψ je elektrický indukční tok plochou S , kterou křivka c obepíná (křivka c a plocha S jsou vzájemně orientovány pravotočivě). Diferenciální a integrální tvar tohoto zákona je:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad ; \quad \oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = I + \frac{d\Psi}{dt} \quad \text{kde} \quad \Psi = \int_s \vec{D} \cdot d\vec{s}$$



Názornou ukázkou je například kondenzátor, kterým prochází střídavý proud. Přes přívodní vodiče teče elektrický proud s proudovou hustotou \vec{j} generující magnetické pole \vec{H} . Mění se proudová hustota \vec{j} vytváří měnící se vír magnetického pole \vec{H} . Poté co proud změnil polaritu, změní se i směr magnetického pole. Proud ve skutečnosti kondenzátorem neprochází. Na deskách se hromadí náboje a vzniká tak mezi nimi měnící se elektrické pole $\partial \vec{D} / \partial t$. Toto podélně se měnící elektrické pole je zodpovědné za měnící se magnetické pole kolem kondenzátoru.

Maxwell tyto zákony nenapsal v této podobě, protože nepoužíval zápis pomocí *divergence* a *rotace*, ale používal složkový zápis. Kromě toho uvedl další rovnice, které z nich plynuly. Dohromady tedy vytvořil sadu asi třiceti rovnic, kde některé byly závislé na ostatních. V původní Maxwellově soustavě pak udělal pořádek Oliver Heaviside (1850 - 1925) a Heinrich Rudolf Herz (1857 - 1894), kteří uvedli původní Maxwellovu soustavu do dnešní podoby. Nějakou dobu se tomu dokonce říkalo Heavisideovy-Herzovy rovnice, což se nelíbilo Albertu Einsteinovi, který chtěl, aby se rovnice jmenovaly po svém autorovi. Později se jim tedy znovu začalo říkat Maxwellovy rovnice. Představují jeden ze základních přírodních zákonů, který se týká elektromagnetických jevů. Z těchto rovnic plyne existence elektromagnetických vln.

6.2 Plazmatická fáze vesmíru

Na počátku v plazmatické fázi existovala celá řada pohybujících se nabitých částic, následkem čehož vznikají rozsáhlé fluktuace magnetických polí. Takže celá počáteční éra je dominantně ovlivňována přítomností magnetických polí. Najdeme základní rovnici pro časový vývoj magnetického pole. Napišme si znovu Maxwellovy rovnice v diferenciálním tvaru:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= \rho_Q \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j}_Q + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned} \tag{49}$$

Magnetické pole a jeho časový vývoj je obsaženo ve třetí rovnici (49), která říká, že časové změny magnetických polí vytvářejí víry elektrických polí. Potřebujeme vědět, jak vzniklé elektrické pole reaguje na nabitě částice. Proudová hustota \vec{j}_Q je úměrná elektrickému poli \vec{E} a je tedy dána *Ohmovým zákonem*:

$$\vec{j}_Q = \sigma \cdot \vec{E}$$

Kde koeficient úměrnosti σ se nazývá vodivost. Takto by to vypadalo v nepohybujícím se prostředí. V prostředí, kde jsou různé turbulence a pohybující se plazma, přibývá další člen ve výrazu pro transformaci elektrického pole. Za nízkých rychlostí se elektrické pole transformuje, čemuž odpovídá i změněná proudová hustota:

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} \quad ; \quad \vec{j}_Q = \sigma \cdot \vec{E}'$$

Kde \vec{u} je rychlost prostředí. Čili i magnetické pole se v pohybující soustavě chová jako pole elektrické. Tato transformace plyne z *Lorentzovy transformace*. Po dosažení dostáváme proudovou hustotu:

$$\vec{j}_Q = \sigma \cdot (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{j}_Q}{\sigma} - \vec{u} \times \vec{B}$$

Došli jsme k závěru, že v pohybující se soustavě je zdrojem elektrického proudu jak pole elektrické, tak také pole magnetické. Dále dosadíme do Maxwellovy rovnice (49), třetí v uvedeném pořadí, pro rotaci elektrického pole \vec{E} :

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{rot} \left(\frac{\vec{j}_Q}{\sigma} - \vec{u} \times \vec{B} \right) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Proudovou hustotu vyjádříme z Maxwellovy rovnice (49), čtvrté v uvedeném pořadí, pro rotaci magnetického pole, při zanedbání Maxwellova posuvného proudu $\partial \vec{D} / \partial t$, protože předpokládáme, že na počátku nemají děje vysokou frekvenci, to znamená, že neexistují nějaké dramatické změny elektrických polí:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}_Q + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow \vec{j}_Q = \text{rot } \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad ; \quad \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \approx 0$$

Za \vec{j}_Q tedy dosadíme pouze $\text{rot } \vec{H}$:

$$\text{rot} \frac{\text{rot } \vec{H}}{\sigma} - \text{rot} (\vec{u} \times \vec{B}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{rot} \text{rot} \frac{\vec{B}}{\sigma\mu} - \text{rot} (\vec{u} \times \vec{B}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad ; \quad \text{rot} \text{rot} \frac{\vec{B}}{\sigma\mu} = \text{grad div} \frac{\vec{B}}{\sigma\mu} - \Delta \frac{\vec{B}}{\sigma\mu} \quad , \quad \text{grad div} \frac{\vec{B}}{\sigma\mu} = 0$$

$$-\Delta \frac{\vec{B}}{\sigma\mu} - \text{rot} (\vec{u} \times \vec{B}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{\sigma\mu} \Delta \vec{B} + \text{rot} (\vec{u} \times \vec{B}) \tag{50}$$

To je rovnice, která nám říká, že se magnetické pole může měnit s časem pouze dvěma způsoby:

- (1) První způsob, první člen pravé strany rovnice (50), se týká *difúze*. Podobné je to například s časovou změnou koncentrace molekul určité látky, což je koeficient krát Δ na koncentraci, nebo s vedením tepla neboli časovou změnou teploty, která je úměrná Δ na teplotu a podobně. *Difúze* popisuje, jak difunduje magnetické pole do okolí. Tam, kde je magnetické pole silné (kde jsou magnetické indukční čáry blízko u sebe), postupem času slábně (magnetické indukční čáry

řídnu), protože magnetické pole difunduje do okolí. Čili zdroje silného magnetického pole difundují do okolí.

- (2) Druhý způsob, druhý člen pravé strany rovnice (50), je trochu jiný. Ve vektorovém součinu je provázané rychlostní a magnetické pole. Čili tento člen nám říká, že magnetické a rychlostní pole jsou nějakým způsobem svázané. Jsou dokonce svázané takovým způsobem, že jedno kopíruje druhé. Takže pokud se plazma někam posune nebo otočí, tak magnetické pole se posune nebo otočí s ním. Čili druhý člen, se týká takzvaného *zamrznání*. Říká, že když máme v plazmatu magnetické pole, tak toto magnetické se pohybuje současně s plazmatem. Například, když ze Slunce vyletí chuchvalec plazmatu (koronální výron hmoty), tak s sebou nese magnetické pole. Pokud se trefojí do Země, dojde k magnetické bouři a dalším jevům jako je například *polární záře*.

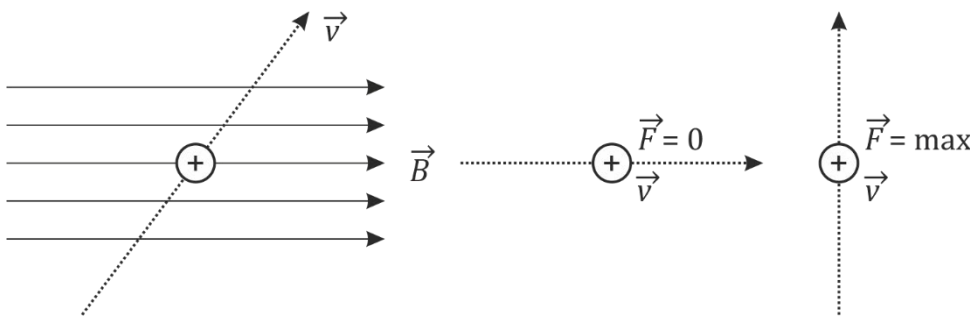
Z tohoto hlediska by se magnetické pole dalo chápat jako odpad procesů pohybu nabitých částic, které jej generují. Jakmile se toto pole někde vygeneruje chaotickým pohybem nabitých částic, pak už se drží plazmatu a je dost obtížné se jej zbavit. V našem Slunci, kde je plazma podobné, jako bylo na konci *Velkého třesku*, je podíl druhého a prvního členu $10^8 : 1$, to znamená, že zcela dominuje druhý člen týkající se *zamrznání* magnetického pole do plazmatu. V průběhu *Velkého třesku* tomu nebylo jinak. První člen v rovnici (50) je tedy zanedbatelný. Čili, dominantně je plazma zamrzlé tím, že si drží své magnetické pole a magnetické pole se drží plazmatu. Pokud se plazma zdeformuje, pole se zdeformuje s ním. Například Slunce má takzvanou diferenciální rotaci. Na rovníku rotuje rychleji než na pólech. Siločára, která je v plazmatu zamrzlá, se natahuje a deformuje spolu s plazmatem táhnoucí se vertikálně přes rovník a zhruba za 8 měsíců je vytažena kolem dokola. Tento koncept *zamrzlých polí* vymyslel poprvé v 50. letech 20. století Hannes Alfvén (1908 - 1995), který za to dostal Nobelovu cenu za fyziku.

6.1 Nabitá částice v magnetickém poli

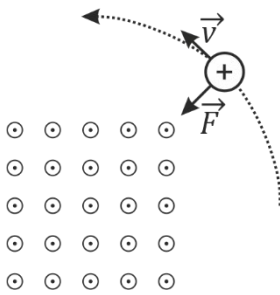
6.1.1 Lorentzova síla

Nyní se podívejme, jak reaguje částice na přítomnost magnetického pole. Jak víme ze základních kurzů fyziky, pokud vletí nabitá částice do magnetického pole s indukcí \vec{B} rychlostí \vec{v} , pak na ni působí *Lorentzova síla* podle vztahu:

$$\vec{F} = Q\vec{v} \times \vec{B}$$



Čím rychlejší je částice, tím větší síla na ni působí. Na druhé straně, pokud je rychlost částice vůči magnetickému poli nulová, nepůsobí na ni žádná síla. Další zajímavý fakt je ten, že působící síla je kolmá jak na směr pohybu částice, tak na směr magnetického pole. Kdyby částice letěla podél indukčních čar magnetického pole, pak je vektorový součin ve výrazu nulový, a tudíž je nulová i síla působící na částici. Částice tedy přirozeným způsobem „kloužou“ podél siločar. Pokud se částice pohybuje kolmo na magnetické indukční čáry, pak je síla působící na částici maximální. Je to jinak, než v elektrickém poli, kde na částici pohybující se podél elektrických siločar působí síla ve směru pohybu. Takže dráha nabité částice pohybující se v magnetickém poli je zakřivená působením síly kolmé na magnetické indukční čáry. Výsledkem je pohyb po kružnici:



Na částici působí odstředivá a dostředivá síla (Lorentzova) podle vztahů:

$$F_o = \frac{mv_{\perp}^2}{R_L} \quad ; \quad F_d = Qv_{\perp}B$$

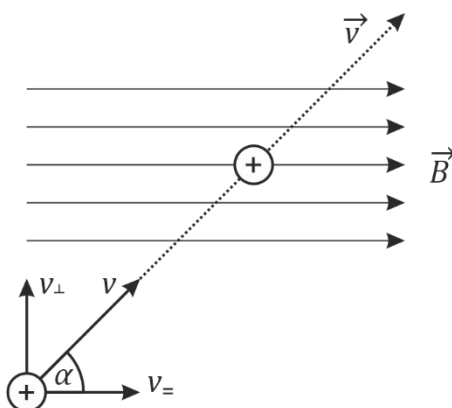
$$F_o = F_d \Rightarrow \frac{mv_{\perp}^2}{R_L} = Qv_{\perp}B \Rightarrow R_L = \frac{mv_{\perp}^2}{Qv_{\perp}B} = \frac{mv_{\perp}}{QB}$$

Kde v_{\perp} je kolmá složka rychlosti, poloměr R_L je takzvaný *Larmorův poloměr*:

$$R_L = \frac{mv_{\perp}}{QB} \quad (51)$$

Částice se tedy pohybuje po kružnici s poloměrem R_L . Pro představu, v Zemské magnetosféře je obrovské množství *elektronů* a *protonů*, které pochází jak ze slunečního větru, tak z kosmického záření. Průměrný *Larmorův poloměr elektronů* může být zde kolem centimetrů, průměrný *Larmorův poloměr iontů* nebo *protonů* může být zde ve stovkách metrů. Toto je situace, kdy se částice pohybuje kolmo na magnetické indukční čáry. Pokud se pohybuje podél indukčních čar, síla na ni nepůsobí a částice se pohybuje rovnoměrně přímočaře. Pokud se pohybuje šikmo ke směru indukčních čar, kolmá složka rychlosti vyvolá kruhový pohyb v kolmém směru. Výsledek je ten, že se částice pohybuje po šroubovici podél indukčních čar magnetického pole. Krouživému pohybu částice se říká *Larmorova rotace* nebo častěji *gyrace* nebo *gyrační pohyb*.

Zajímavé je, že stacionární magnetické pole nemění energii částice. Mění její směr rychlosti, ale nemění velikost rychlosti. Pokud nastřelíme částici šikmo na směr indukčních čar pod úhlem α , pak můžeme rozložit směr její rychlosti na rychlost ve směru indukčních čar (rychlost rovnoběžnou v_{\parallel}) a rychlost kolmou na indukční čáry (rychlost kolmou v_{\perp}):



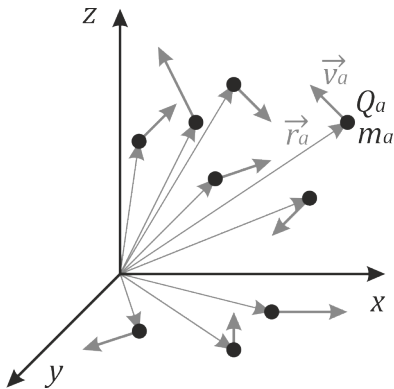
Potom můžeme psát:

$$v_{\perp} = v \sin \alpha \quad ; \quad v_{\parallel} = v \cos \alpha$$

Rovnoběžná složka způsobí pohyb podél siločar, kolmá složka způsobí pohyb po kružnici. Výsledný pohyb je tedy pohyb po šroubovici podél indukčních čar magnetického pole.

6.1.2 Soustava nabitých částic

Mějme soustavu nabitých částic, kde každá částice má náboj Q_a , hmotnost m_a , polohový vektor \vec{r}_a a rychlost \vec{v}_a , kde $a = (1, 2, \dots, N)$:



V teorii elektromagnetického pole se dělá rozvoj elektromagnetických potenciálů do řady, kde první netriviální členy se nazývají *dipólové členy*. *Elektrický dipólový moment* je definován jako:

$$\vec{p}_E = \sum_a Q_a \vec{r}_a \quad (52)$$

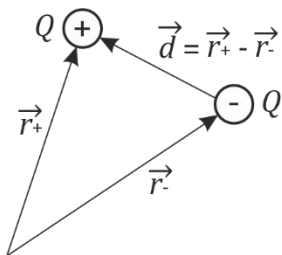
Poznamenejme, že pokud bychom toto udělali s hmotou, dostaneme výraz úměrný těžišti dané soustavy. *Magnetický dipólový moment* je definován jako:

$$\vec{p}_M = \sum_a \frac{1}{2} Q_a (\vec{r}_a \times \vec{v}_a) \quad (53)$$

Pokud tedy máme soustavu nabitých částic, která tady byla v průběhu *Velkého třesku*, tak můžeme definovat *elektrický a magnetický dipólový moment*.

6.1.2.1 Příklad: Elektrický dipólový moment

Mějme dvě opačně nabité částice:



Elektrický dipólový moment bude:

$$\vec{p}_E = \sum_a Q_a \vec{r}_a = Q \vec{r}_+ - Q \vec{r}_- = Q \cdot (\vec{r}_+ - \vec{r}_-) = Q \cdot \vec{d}$$

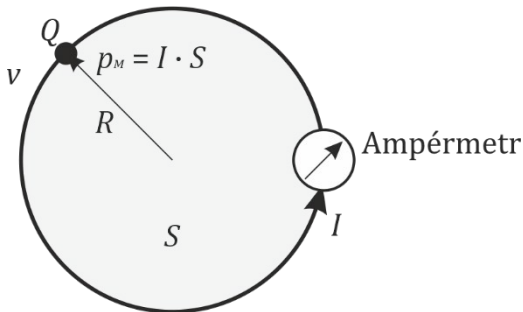
$$p_E = Q \cdot d$$

Což je středoškolská definice *elektrického dipólového momentu* vycházející z jedné kladně a jedné záporně nabité částice, kdy definujeme dipólový moment jako náboj krát vzdálenost. To je ovšem

pouze speciální případ. V obecném případě musíme použít výraz (52). Samozřejmě, že v přítomnosti elektrických a magnetických polí se částice nějak pohybují, čímž se mění i momenty.

6.1.2.2 Příklad: Magnetický dipólový moment

Představme si, že z celkového součtu máme pouze jednu částici kroužící po kružnici:



Magnetický dipólový moment pak bude:

$$\vec{p}_M = \sum_a \frac{1}{2} Q_a (\vec{r}_a \times \vec{v}_a) = \frac{1}{2} Q (\vec{R} \times \vec{v})$$

$$p_M = \frac{1}{2} QRv = \frac{1}{2} QR \frac{2\pi R}{T} = \frac{Q}{T} \cdot \pi R^2 = I \cdot S$$

Což je středoškolská definice *magnetického dipólového momentu*. To je ovšem opět pouze speciální případ. V obecném případě musíme použít výraz (53).

6.1.3 Polarizace a magnetizace

Ve fyzice se většinou snažíme používat intenzivní veličiny vztahované k něčemu. Určitě nás nebude zajímat hmotnost Černého moře, ale jeho hustota neboli hmotnost vztahovaná na jednotku objemu. Stejně tak nás nebude zajímat celkový tepelný obsah Země, ale tepelný obsah na jednotku objemu a podobně. Všechny tyto veličiny pro lepší představu vztahujeme k jednotce objemu. Takže nás také nebude zajímat celkový *dipólový moment*, ale hustota *elektrického dipólového momentu* \vec{P} a hustota *magnetického dipólového momentu* \vec{M} :

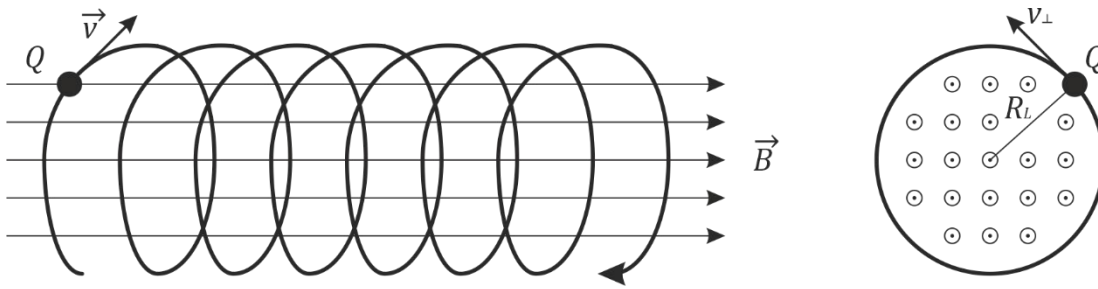
$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}_E}{\Delta V} ; \quad \vec{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}_M}{\Delta V}$$

Veličině \vec{P} se říká *polarizace*, veličině \vec{M} se říká *magnetizace*. To jsou ty veličiny, které nám modifikují elektrické a magnetické pole:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} ; \quad \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

Poznamenejme, že odlišnost ohledně závorek u obou výrazů má historický kontext.

6.1.4 Magnetický dipólový moment částice pohybující se podél indukční čáry



Částice se pohybuje podél indukční čáry po šroubovici s poloměrem R_L . *Magnetický dipólový moment* bude podle upraveného vztahu (53):

$$p_M = \frac{1}{2} QR_L v_{\perp} = \frac{1}{2} Q \frac{mv_{\perp}}{QB} v_{\perp} = \frac{1}{2} \frac{mv_{\perp}^2}{B}$$

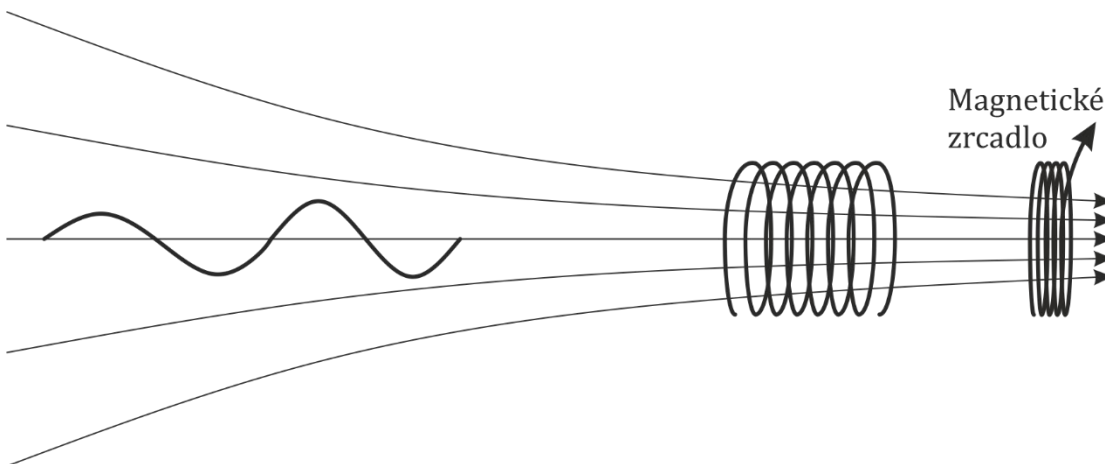
Vidíme, že *magnetický dipólový moment* částice v magnetickém poli pohybující se po kružnici nebo šroubovici je roven podílu kolmé složky kinetické energie $mv_{\perp}^2/2$ a indukce magnetického pole B . V teorii pole se dá dokázat, že pokud se magnetická pole nemění příliš divoce, pak *magnetický dipólový moment* se zachovává:

$$\left. \begin{aligned} p_M &= \frac{1}{2} \frac{mv_{\perp}^2}{B} = |v_{\perp} = v \sin \alpha| = \frac{1}{2} \frac{mv^2 \sin^2 \alpha}{B} = \text{konst} \\ \frac{1}{2} mv^2 &= \text{konst} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{B} = \text{konst}$$

Protože celková kinetická energie $mv^2/2$ je konstantní (mění se pouze směr), zachovává se poměr $\sin^2 \alpha / B$:

$$\frac{\sin^2 \alpha}{B} = \text{konst} \quad (54)$$

Pokud tedy zesílí pole B , zvětší se úhel α . Například v nehomogenním magnetickém poli, když nastřelíme částici v malém úhlu ke směru indukčních čar a indukční čáry se ve směru pohybu částice postupně více a více zhušťují (pole zesiluje), úhel α roste a částice se stále více a více napřimuje směrem ke kolmici ke směru indukčních čar:



Takže obecně bude platit:

$$\frac{\sin^2 \alpha_1}{B_1} = \frac{\sin^2 \alpha_2}{B_2} \quad (55)$$

To znamená, že v různých magnetických polích bude částice měnit svůj úhel. V slabším poli se skloní směrem ke směru indukčních čar, v silnějším poli se zase více napřímí. Pokud pole bude hodně silné, pak se částice může napřímí až na úhel 90 stupňů, což znamená odraz částice. Takovému efektu se říká *magnetické zrcadlo*. Je to oblast hustého magnetického pole, které odrazí částici. Kdy k tomu dojde? Pokud nastřelíme částici pod počátečním úhlem α_0 v poli B_0 a na cestě existuje pole zrcadla B_z , kde $\alpha_z = 90^\circ$, pak z rovnice (55) dostáváme:

$$\frac{\sin^2 \alpha_0}{B_0} = \frac{1}{B_z} \Rightarrow B_z = \frac{B_0}{\sin^2 \alpha_0}$$

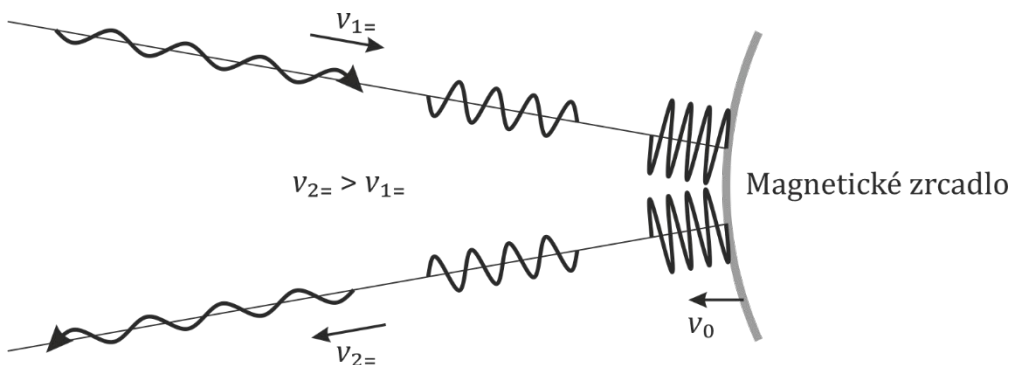
To znamená, že když pole dosáhne hodnoty B_z dané tímto výrazem, pak dojde k odrazu částice. Říkáme tomu rovnice *magnetického zrcadla*:

$$B_z = \frac{B_0}{\sin^2 \alpha_0} \quad (56)$$

Jak můžeme vidět, závisí to také na počátečním úhlu. Pokud bychom nastřelili částici téměř podél indukční čáry, má vysokou šanci proletět. Jakmile ale letí šikmo na indukční čáry, může se v *magnetickém zrcadle* odrazit.

K tomuto efektu dochází u naší Země, která má ve svém okolí zhruba dipólové magnetické pole (ve větších vzdálenostech je deformované do čelní rázové vlny a ohonu). V tomto poli se nachází zachycené nabitě částice přilétající ze slunečního větru nebo z kosmického záření pronikající k Zemi v polárních oblastech, které se pak pohybují od pólu k pólu rotačním pohybem podél indukčních čar, protože pole u pólů houstne a částice se odrazí od *magnetického zrcadla* zpět ke druhému pólu a děj se opakuje. Čili nabitě částice pendlují od jednoho pólu ke druhému a výsledkem je, že tyto pendlující částice velmi intenzivně září, protože mění vektor své rychlosti, čímž vznikají ty známé *Van Allenovy radiační pásy* naší Země, kterým je třeba se vyhnout. Většinou bývají dva (vnitřní a vnější), ale jsou situace, kdy je jich i větší množství. Byly objeveny při startu první americké družice.

Vraťme se do prostředí *Velkého třesku*, kde je plazmatické skupenství a obrovské množství pohybujících se částic s různými divokými fluktuacemi, které dávají vzniknout fluktuacím magnetických polí, která rozhodně nejsou homogenní. Často tam dochází k tomu, že magnetické indukční čáry se někde k sobě přibližují (houstnou) nebo vzdalují (řídnu) a nabitě rotující částice se odráží na tomto zhoustnutí (zesílení) lokálního magnetického pole jako od *magnetického zrcadla*. Celé pole je samozřejmě vázané na plazma a s ním se také pohybuje. Čili prostředí *Velkého třesku* si můžeme představit jako velké množství různě se pohybujících *magnetických zrcadel*. A když se částice odráží od statického *magnetického zrcadla*, tak se odráží se stejnou rovnoběžnou rychlostí, s jakou tam přiletěla ($v_{2=} = v_{1=}$). Pokud se odráží od *magnetického zrcadla*, které se proti ní pohybuje rychlostí v_0 , pak se odráží vyšší rovnoběžnou rychlostí ($v_{2=} > v_{1=}$):



Tento efekt studoval významný kvantový fyzik Enrico Fermi, který zjistil, že pouze malé procento částic pohybujících se v raném a potom i v pozdějším vesmíru nejrůznějšími rychlostmi má tyto rychlosti

enormně vysoké. Je to dáno statistickým Maxwellovým rozdělením. Představme si, že v průměru některé částice potkávají zrcadla, která se přibližují a která se vzdalují a vcelku nic nezískají (mechanismus *prvního druhu*), ale velmi malé procento částic bude mít šanci potkat za sebou více zrcadel pohybujících se proti nim, čímž získají obrovskou energii. Takže velmi malé procento částic je urychlováno. Tomu se říká *Fermiho mechanismus druhého druhu*. Je to jeden ze základních mechanismů vzniku kosmického záření v současném vesmíru. Mimo tento mechanismus vzniká kosmické záření také v jádrech aktivních galaxií a podobně, ale v raném vesmíru plném magnetických polí to byl docela výrazný fenomén, který malou část nabitých částic urychloval na extrémně vysoké energie. Poznamenejme, že mechanismus *prvního druhu* je prostý odraz od magnetického zrcadla, kdežto mechanismus *druhého druhu* je, když částice opakovaně potká statisticky větší množství přibližujících se zrcadel.

Období vesmíru, kterému dnes dobře rozumíme díky ověřitelnosti na urychlovačích, se tedy týká časů od 10^{-6} sekundy po 380 000 let:

- V 1 mikrosekundě až 10 mikrosekundách se *kvark-gluonové plazma* začalo shlukovat do částic a vznikaly první *neutrony* a *protony*.
- V 1 sekundě se oddělila *neutrino* od látky, což mělo za následek narušení rovnováhy mezi *protony* a *neutrony*. Volné *neutrony* jako nestabilní částice postupně mizí a pro budoucnost se zachovávají pouze vázané *neutrony* jako součást atomárních jader, k jejichž tvorbě dochází až v čase řádově minut. Dříve to není možné, protože v tak horkém a hustém plazmatu je jakýkoliv celek, který vznikl, rozbit vysokou frekvencí srážek a později to také už není možné, protože jak se vesmír rozeplnul a ochladl, jsou srážky naopak velmi nepravděpodobné a navíc také chybí volné *neutrony*, které mají poločas rozpadu řádově v minutách, a bez *neutronů* jádro nepostavíme.
- V období řádově od sekund do cca 10 sekund, došlo k divoké anihilaci *elektronů* a *pozitronů*, a tím také k ohřátí vesmíru o 40 % kromě *neutrin*, která již byla oddělena od látky a interagují pouze *slabou interakcí*.
- Celá počáteční fáze vývoje vesmíru končí v čase 380 000 roků, kdy volné *elektrony* vytvořily atomární obaly, a došlo k oddělení záření od látky.

7. SLOŽENÍ VESMÍRU

Základní ingredience vesmíru jsou:

- 7.1 Atomární látka (5 %)
- 7.2 Temná hmota (27 %)
- 7.3 Temná energie (68 %)

7.1 Atomární látka (5 %)

Atomární látka je ve vesmíru 5 % včetně té, která nesvítí (svítí přibližně 1 % celku). Jak víme z předchozího textu, zárodky atomární látky se rodily v čase kolem jedné mikrosekundy, kdy se z kvark-gluonového plazmatu rodily první *protony* a *neutrony*. Pokračovalo to v jedné sekundě oddělením *neutrin* od látky, což vedlo během několika minut k rozpadům *neutronů* nebo slučováním *s protony* a tvorbě lehkých jader. Elektronové obaly vznikly až v době od 380 000 let od počátku na konci *Velkého třesku*, následkem čehož došlo k oddělení záření od látky. Těžší prvky za *lithiem* až po *železo* vznikaly později v termojaderných kotlích v nitrech hvězd a prvky nad *železem* vznikaly při explozích supernov v energetických rázových vlnách.

7.2 Temná hmota (27 %)

Na *temnou hmotu* poprvé upozornil Fritz Zwicky (1898 - 1974), významný vědec, který byl mimořádně nadaný a schopný. Narodil se v bulharské Varně, maminka byla Češka, vystudoval ve Švýcarsku a hlavní léta prožil ve Spojených státech na Mount Wilsonu a v Millikanově laboratoři. Fritz Zwicky počítal to, čemu se říká *teorém o viriálu*. V teoretické fyzice se dá ukázat, že průměrná střední hodnota *kinetické energie* $\langle W_k \rangle$ nějakého souboru jedinců je rovna střední hodnotě takzvaného *viriálu* $\langle v \rangle$:

$$\langle W_k \rangle = \langle v \rangle$$

Střední hodnota *kinetické energie* není rovna střední hodnotě *potenciální energie*, protože například jenom v gravitaci platí, že *kinetická energie* je kladná, kdežto *potenciální energie* je záporná. *Viriál* tedy souvisí s *potenciální energií* vztahem:

$$v \equiv \frac{1}{2} x \frac{\partial W_p}{\partial x}$$

Kde x je proměnná, na které závisí *potenciální energie*. Čili střední hodnota *kinetické energie* nějakým způsobem kopíruje střední hodnotu *potenciální energie*, ale není to kopie 1:1. Je to skryto právě ve veličině zvané *viriál*. Pro gravitační *potenciální energii* platí:

$$W_p = -\frac{GM}{r} = -\frac{\alpha}{r}$$

Viriál potom bude:

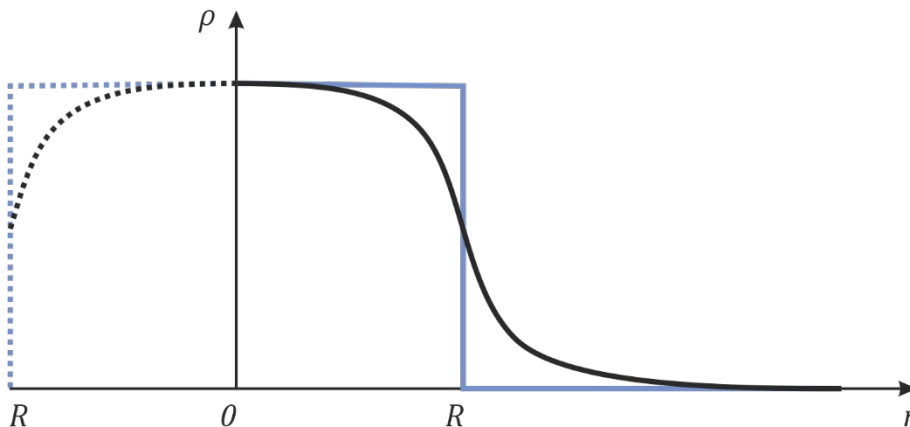
$$v \equiv \frac{1}{2} r \frac{\partial W_p}{\partial r} = \frac{1}{2} r \frac{\partial \left(-\frac{\alpha}{r} \right)}{\partial r} = \frac{1}{2} r \frac{\alpha}{r^2} = \frac{1}{2} \frac{\alpha}{r} = -\frac{W_p}{2}$$

Čili pro gravitační systémy by mělo platit, že střední hodnota *kinetické energie* je rovna mínus polovině *potenciální energie*:

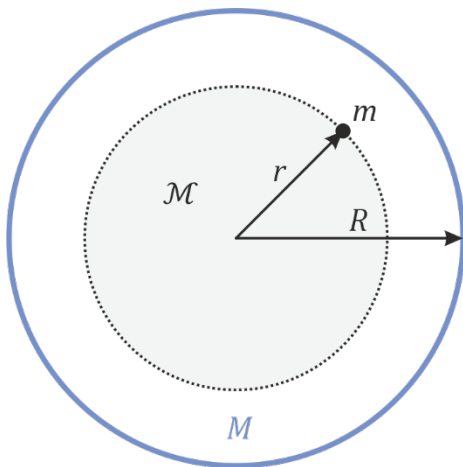
$$\langle W_k \rangle = \left\langle -\frac{W_p}{2} \right\rangle \quad (57)$$

Od objevu první cizí galaxie (Mlhovina v Andromedě) v roce 1923 do roku 1933 uběhlo 10 let a za tuto dobu už bylo známo, že galaxií je obrovské množství a že některé z nich se seskupují do velkých kup galaxií. Fritz Zwicky sledoval jednu z kup galaxií ve Vlasech Bereniky a zkoumal na ní, zda platí teorém o *virialu*. *Kinetickou energii* zjišťoval z pohybů jednotlivých členů kupy (dělal si průměry pohybů jednotlivých galaxií, které zjišťoval z posuvu spektrálních čar) a *potenciální energii* odhadoval z hmoty látky, kterou pozoroval v kupě. Zjistil naprostý nesoulad. Pohyby měly odpovídat většímu množství hmoty, než viděl v dalekohledu. Upozornil tedy na chybějící látku, které tenkrát říkal *skrytá hmota* a myslel si, že půjde o běžnou atomární látku, která jenom nesvítí. Mnohem později se ukázalo, že se nejedná o jednoduchý problém, ale o obecný fenomén.

V roce 1968 americká astronomka Vera Rubinová (1928 - 2016) sledovala v několika spirálních galaxiích rotační křivky. Taková galaxie má velmi husté jádro a plochý disk, ve kterém je už relativně málo hvězd. Obrázek ukazuje závislost hustoty hmoty ρ na vzdálenosti od centra galaxie r :



Tato závislost se pro jednoduchý základní výpočet dá snadno aproximovat hustým jádrem s konstantní hustotou a řídkým okolím, kde se nachází už jenom jednotlivé hvězdy. Čili nahradili jsme galaxii systémem, kde máme husté jádro s konstantní hustotou ($\rho = \text{konst} > 0$) a okolím s přibližně nulovou hustotou ($\rho = 0$). Spočítejme si rychlostní profil v takovém systému:



Nechť M je celková hmotnost galaxie. Na libovolnou hvězdu s hmotností m nacházející se někde uvnitř jádra s poloměrem R působí gravitačně jenom ta část hmoty \mathcal{M} , která je blíže k centru. Všechno ostatní se vruší:

$$\mathcal{M}(r) = \frac{r^3}{R^3} M$$

Z výrazu je patrné, že čím má hvězda nacházející se v jádru větší vzdálenost od centra, tím větší gravitace na ni působí, jak postupně narůstá objem hmoty. Je to dáno podílem objemů a objemy jsou úměrné třetí mocnině. Když si napíšeme výraz pro rovnováhu odstředivých a dostředivých sil, tak by mělo pro daný objekt (hvězdu) s hmotností m platit:

$$\frac{mv^2}{r} = G \frac{mM}{r^2}$$

$$\frac{v^2}{r} = G \frac{R^3 M}{r^2}$$

$$v^2 = \frac{GM}{R^3} r^2$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R^3}} \cdot r \Rightarrow v \sim r \quad (58)$$

Oběžná rychlost objektů je úměrná vzdálenosti od centra galaxie, což odpovídá rotaci tuhého tělesa, kdy obvodová rychlost je úměrná vzdálenosti od centra rotace. V periferních oblastech tomu bude jinak, protože tam už jsou jednotlivé hvězdy, na které jádro působí jako celek, to znamená svou celkovou hmotností:

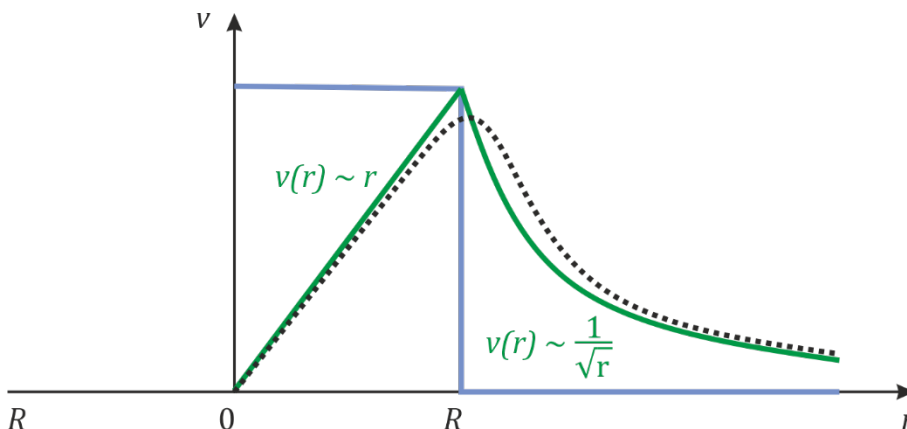
$$\frac{mv^2}{r} = G \frac{mM}{r^2}$$

$$\frac{v^2}{r} = G \frac{M}{r^2}$$

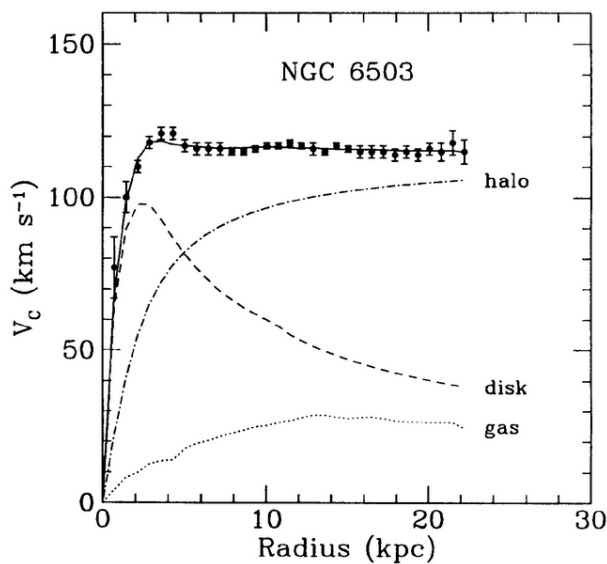
$$v^2 = \frac{GM}{r}$$

$$v = \sqrt{GM} \frac{1}{\sqrt{r}} \Rightarrow v \sim \frac{1}{\sqrt{r}} \quad (59)$$

To je vztah, který platí například také pro sluneční soustavu. Hmotnost M představuje naše Slunce a obíhající planety mají rychlost nepřímo úměrnou vzdálenosti r od centra. Čím jsou tedy dále, tím nižší je jejich rychlost, která klesá s odmocninou vzdálenosti. Pokud zakreslíme obě tyto závislosti (58) a (59), dostaneme:



Je zřejmé, že ten ostrý přechod je důsledkem aproximace. Reálný průběh je naznačen čárkovaně. Kolem jádra rychlost roste lineárně s poloměrem a v periferních oblastech klesá nelineárně. Vera Rubinová experimentálně měřila rychlostní profily nikoli hvězd, ale oblak vodíku u galaxie NGC 6503 (nezáleží na tom, jestli se jedná o hvězdy nebo jinou hmotu). A výsledky jsou vidět na diagramu:



Takže výsledek měření dopadl jinak než by se očekávalo z Keplerových zákonů nebo gravitačního zákona. Vera Rubinová uvažovala podobně jako Fritz Zwicky: Pokud je oběžná rychlost na periferii výrazně větší, než odpovídá teorii, pak je tam větší i odstředivá síla a periferní části by měly odletět pryč. A protože neodletí, pak tam musí existovat nějaká hmota navíc, která je drží. Dospěla tedy ke stejnému závěru.

To byly dva nezávislé postupy, jak se došlo k tomuto objevu. Jeden od Fritze Zwickyho přes teorém o *virialu* a druhý od Very Rubinové z rovnováhy odstředivé a dostředivé síly. Otázkou tedy je, co to je *temná hmota* a kde se nachází. *Temná hmota* působí gravitačně, protože nám zasahuje jak do oběhu hvězd nebo oblak plynu v galaxiích, tak do pohybu v kupách galaxií. Čili *temná hmota* určitě interaguje gravitačně, ale nikoliv elektromagneticky, jinak by svítila a věděli bychom o ní. Neinteraguje ani *silnou interakcí*. Doufáme, že interaguje alespoň *slabou interakcí*.

Temná hmota se projevuje gravitačně na vzdálených objektech tak, že zakřivuje *časoprostor* mezi nimi a pozorovatelem na Zemi. Světlo ze vzdálených galaxií letí v tomto pokriveném světě Alberta Einsteina a je tedy deformováno přítomností *temné hmoty*, kterou nevidíme a která způsobuje tuto deformaci času a prostoru. Poznáme to z deformovaných obrazů vzdálených objektů. Z této deformace můžeme dopočítat rozložení *temné hmoty* v prostoru. Díky pozorování velkého množství galaxií a jejich optických deformací dokážeme na počítači dopočítat, jak vypadá mezilehlá *temná hmota*. Samozřejmě, že nechceme mít jenom časoprostorovou mapu *temné hmoty*, to znamená vědět, že vytváří nějaká vlákna a útvary, ale také chceme vědět, co to je. Podle současných představ by to mohly být nějaké elementární částice, které jsou za hranicí standardního modelu a které interagují určitě gravitačně a možná i *slabou interakcí*. Na Zemi máme několik desítek detektorů *slabé interakce*, které se snaží tyto částice zachytit. Na základě numerických simulací to vypadá, že skutečná atomární látka se stahuje do míst, kde se kříží vlákna *temné hmoty*, což znamená, že *temná hmota* dominantně určuje strukturu vesmíru.

Existuje celá řada nápadů, co by mohly být částice *temné hmoty*, například *WIMPy* (*Weakly Interacting, Massive Particles*), *Axiony* nebo *Chameleony*.

7.2.1 WIMPy

Dnes jsou nejvýznamnější *WIMPy*. Měly by to být pozůstatky po horkém původu světa, kdy by se v tom extrémně horkém a hustém počátku měly vyskytovat elementární částice, kde každá je ve dvou provedeních, a to jako *fermion* a *boson*. Tedy každá částice jako *snášennivá* a *nesnášennivá*. *Fermiony*, jako například *elektrony*, jsou částice splňující *Pauliho vylučovací princip*, to znamená, že dva *fermiony* nemohou být ve stejném kvantovém stavu. Díky tomu máme to bohatství vlastností atomů, které máme, protože tím, že *elektrony* vytváří atomární obaly a každý další se usadí v další energetické hladině a má jiná kvantová čísla, než ten předchozí, tak tato skutečnost vytváří hierarchii atomárních

obalů a jejich vlastností. Proto má například *zlato* jiné vlastnosti než třeba *neon*. Takto se tedy chovají *fermiony*. *Bosony* reagují obráceně. Za nízkých teplot obsazují stále stejný kvantový stav, hromadí se ve stejném stavu, vytváří bosonové kondenzáty a různé supravodivé nebo supratekuté látky a podobně, což je rovněž z technologického hlediska nesmírně užitečné.

Z hlediska elementárních částic se ukazuje, že stavebními kameny vesmíru jsou vždy *fermiony* (nesnášenlivé částice), což jsou *elektrony*, *neutrino*, *kvarky*. A to pojivo, které je spojuje, to znamená polní částice jako *fotony*, *gluony* *W* a *Z*, jsou *bosony* a obsazují naopak stejné kvantové stavy ve větším množství. Existuje představa, že za extrémně horkých podmínek by každá částice měla existovat v obou variantách, to znamená jako *snášenlivá* i jako *nesnášenlivá*. Takže například někdy na počátku měl *elektron* dvě verze. Jeden typ *elektronu*, který známe a který je *nesnášenlivý*, a tudíž neobsazující stejný kvantový stav s více jedinci, a druhý typ *elektronu*, *selektron* (super partner k *elektronu*), který byl *snášenlivý* k okolí a obsazoval stejné kvantové stavy ve větších množstvích. Podobně *foton*, který je polní částicí a má schopnost obsazovat stejné kvantové stavy, tak na počátku mohlo existovat *fotino*, které tuto vlastnost nemělo a chovalo se jako *fermiony*. Čili, každá částice v tom horkém původu světa měla dvě varianty (*snášenlivou* a *nesnášenlivou*). Těmto variantám se říká *superpartneři* a celé této záležitosti *supersymetrie*. Dnes ještě nevíme, zda je to jenom vize nebo realita. Pokud *supersymetrie* na počátku existovala a každá částice měla dvě varianty, pak by to znamenalo, že jak vesmír chladnul, někteří *superpartneři* vymřely do současného stavu, kdy už máme pouze nesnášenlivé *elektrony* a snášenlivé *fotony*. Ale někteří *superpartneři*, respektive jejich kombinace superpozice, vyhynout nemohly, protože už neměly na co se rozpadnout. A to by měly být *WIMPy*, reliktní *superpartneři* z dávné doby.

Také je otázkou, zda by *neutrino* nemohla být těmi hledanými částicemi *temné hmoty*. Částečně ano. *Neutrino* mají skutečně vlastnosti jako *temná hmota*. Jsou to částice, které vším procházejí, mají malou, nenulovou hmotnost a jsou schopny gravitačně ovlivňovat okolí, i když minimálně. Jejich rychlost je ovšem blízká rychlosti světla právě díky malé klidové hmotnosti, což je problém. Takovým částicím říkáme *horké částice* v tom smyslu, že mají vysokou rychlost. Tím, že za dobu existence vesmíru proletěla *neutrino* jeho podstatnou viditelnou část, plyne, že pokud by byl vesmír vyplněn z 27 % *horké temné hmoty* z *neutrino*, tak by energie této hmoty zlikvidovala zárodečné fluktuace, ze kterých se později vyvinuly hvězdy, galaxie a kupy galaxií. Takže by se ty fluktuace z konce *Velkého třesku* nevyvinuly v galaxie a kupy galaxií, ale byly by „rozpuštěny“ *horkou temnou hmotou*.

Dnes věříme, že *temná hmota* má dvě složky, *HDM* (*Hot Dark Matter*, *horká temná hmota*) a *CDM* (*Cold Dark Matter*, *chladná temná hmota*). K *HDM* určitě patří *neutrino* a možná i další částice, ale celkově musí být menšinová, protože jinak by zlikvidovala počáteční fluktuace, což nepozorujeme. Většinová musí být *CDM*, což mohou být snad *WIMPy*. Takže to, co hledáme v detektorech, je *chladná temná hmota*. Model vesmíru založený na *chladné temné hmotě* se nazývá Λ *CDM model*, kde písmeno Λ reprezentuje *kosmologickou konstantu* a zrychlenou expanzi vesmíru, za kterou by měla být odpovědná *temná energie*. *Chladná temná hmota* funguje opačně, než *horká temná hmota*. Gravitačně posiluje zárodečné fluktuace, hroutí je do sebe a vytváří z nich struktury. Označení Λ *CDM* tedy představuje model vesmíru postavený jak na *temné energii*, tak *temné hmotě*.

DAMA (*Dark Matter*) je pravděpodobně nejznámější experiment snažící se zachytit částice *temné hmoty*. Tento scintilační experiment probíhá ve střední Itálii pod horou Gran Sasso v hloubce 1,5 km. Poznamenejme, že do roku 2000 se experiment jmenoval *DAMA*, od roku 2003 se jmenuje *Libra*. Dalším experimentem je *CRESST*, který probíhá také pod horou Gran Sasso s jiným scintilátorem (CaWO_4), než má *Libra*. Stejně výsledky dal experiment *CoGeNT*, který probíhá ve starém dole v Soudanu ve Spojených státech. Z těchto experimentů se počítala hmotnost *WIMPů*, která vyšla o něco málo nižší než 10 GeV. Při takové hmotnosti by *WIMPy*, pokud by se potkaly, zanihovaly za vzniku rentgenového záření (*WIMP* se chová současně jako částice i jako antičástice). Ovšem toto rentgenové záření nejlepší detektor *Fermi* vůbec neregistruje. Takže prozatím záhada *temné hmoty* vyřešena není. Některé experimenty jakoby něco vidí, ale jiné experimenty to zároveň jakoby popírají tím, že žádný signál nezaznamenají.

Dalším zajímavým experimentem je *AMS (Alpha Magnetic Spectrometer)*, částicový detektor postavený v Cernu, který se nachází na rameni mezinárodní kosmické stanice. Měří docela hodně *pozitronů*, což neodpovídá množství, které by tam mělo být, takže se spekuluje, kde se berou. Existují dvě možnosti. První je, že tyto *pozitrony* pochází z míst blízkých neutronovým hvězdám (vznikají tam *elektron-positronové páry*); druhou možností je, že jsou tou produkty anihilace *WIMPů*, což by souviselo s *temnou hmotou*. Ovšem pak je to divné, protože detektor *Fermi* neměří vůbec nic. Proto to chce detekci jiných typů, abychom nebyli závislí pouze na scintilačních detekcích. O jednu takovou se pokouší ve Fermilabu experiment *DAMIC*, kde do podzemního tunelu, který původně sloužil ke sledování oscilací *neutrin*, v hloubce asi 300 metrů (odstínění *elektronů*) umístili chlazenou (potlačení tepelného šumu) CCD kameru v boxu z olověných cihel (odstínění *mionů*). Po tomto odstínění nějaký signál naměřili, ale zatím není zcela jasné, o co jde.

7.2.2 Axiony

Axion je hypotetická částice *temné hmoty* s malou hmotností. Měla by být slabě interagujícím *bosonem* se spinem 0. Dnes se zdá, že *axiony* nejsou tou správnou cestou, ale z hlediska vědy to může být poučné. V roce 2006 na italském experimentu *PVLAS (Polarization of Vacuum with LASer)* oznámili, že našly částice *temné hmoty*. Experiment byl založen na obrovském magnetu s indukcí 5 T, kdy tímto magnetickým polem proháněli polarizovaný laserový paprsek. Zjistili, že se nepatrně stočila rovina polarizace, a to o úhel $\alpha = (3,9 \pm 0,5) \cdot 10^{-12}$ rad/m. Udělali 44 000 průchodů oblastí o délce 1 metr a vypadalo to jako docela průkazné. Stočení roviny polarizace zdůvodnili tím, že podle našich znalostí se mohou *fotony* v přítomnosti magnetického pole změnit na částice *temné hmoty* a naopak částice *temné hmoty* na *fotony*. Podle tohoto tvrzení se tedy *fotony* z laseru v silném magnetickém poli změnil na *axiony*, které odvedly část momentu hybnosti, čímž se stočila rovina polarizace. Takže oznámili objev *axionů* tím, že je vyrobily z *fotonů* průchodem silným magnetickým polem.

Jiný experiment *CAST (Cern Axion Solar Telescope)* neměřil vůbec nic, přestože by měl. Byl založen na předpokladu, že ve Slunci při termojaderné syntéze by kromě jiných částic mohly vznikat v polích, které tam jsou, také *axiony*. Vyřazený testovací magnet pro LHC délky 10 metrů s magnetickou indukcí 9 T byl použit jako dalekohled mířící na Slunce. *Axion* ze Slunce měl vletět do silného magnetického pole dalekohledu, kde se změnil na rentgenové záření, které detekuje rentgenový detektor. Použitý detektor vyrobili Němci a původně měl letět na oběžnou dráhu, ale pak jim došly peníze, takže jim zbyl a nebylo pro něj jiné využití. V době, kdy Italové oznámili objev *axionů*, tento experiment nenaměřil vůbec nic. Což je zvláštní, protože buď by oba experimenty měli detekovat něco, nebo oba neměly detekovat nic.

Ale protože objev *temné hmoty* vypadal slibně, tak v Německu v DESY (Deutsches Elektronen Synchrotron) začaly stavět zařízení na zachycení. Světlo laseru mělo být prohnáno šesticí magnetů a změněno na *axiony*. Ty pak měly projít stěnou a jinou šesticí magnetů, které je měly změnit zpět na elektromagnetické záření. V lednu 2007 na to dostali grant, v únoru 2007 zemřel šéf italské skupiny a 14 dní po jeho smrti vydali prohlášení, že se distancují od tohoto experimentu. Tento experiment se tedy neuskutečnil.

7.2.3 Chameleony

Chameleon je hypotetická částice *temné hmoty*, u níž je hmotnost výraznou funkcí hustoty energie okolního prostředí. Hmotnost *chameleonu* je proto v mezgalaktickém prostředí mnohem nižší než například ve Sluneční soustavě. Částice by měla být slabě interagujícím *bosonem* se spinem 0.

7.3 Temná energie (68 %)

V roce 1998 se začaly k určování vzdálenosti hojně používat *supernovy typu 1A*. Astronomie má obecně problém s určováním vzdáleností. Malé vzdálenosti jsou vcelku snadnou záležitostí; ve Sluneční soustavě to můžeme udělat přímým měřením z radarových odrazů. Vzdálenosti nejbližších hvězd se určují z takzvané *paralaxy*; tím, jak Země obíhá kolem Slunce, se na blízkou hvězdu díváme pod různými úhly, čímž hvězda zdánlivě opisuje oblouček na obloze a z poloměru tohoto obloučku můžeme

určit její vzdálenost. U středně vzdálených galaxií fungují pro určení jejich vzdáleností takzvané *cefeidy*; jsou to proměnné hvězdy, které pulzují, a jejich zářivý výkon souvisí s periodou těchto pulzací; takže stačí v nějaké galaxii najít *cefeidu*, zjistit její periodicitu, z toho spočítat kolik vyzařuje energie a z její jasnosti dopočítat, jak je daleko. Poznamenejme, že díky *cefeidám* Edwin Hubble zjistil, že Andromeda leží mimo naši galaxii, protože je tam našel a pomocí nich změřil a dopočítal vzdálenost. Tento způsob ale nelze použít pro galaxie, které jsou vzdáleny například 8 nebo 10 miliard světelných roků; tam už žádné *cefeidy* nelze vidět. V takových případech jsou výhodné *supernovy typu 1A*, což jsou dvojice hvězd, z nichž jedna je *bílý trpaslík*. *Bílý trpaslík* je hvězda, kde už neprobíhá termojaderná syntéza, protože došlo palivo a začala se hroutit; *nesnášenlivé elektrony* mohou odporovat gravitaci a zastavit kolaps, čímž vznikne *bílý trpaslík*. *Bílí trpaslíci* mají mez stability kolem 1,4 hmotnosti Slunce. Pokud by to *elektrony* nezvládly, pak to ještě mohou zvládnout *neutrony*, čímž by vznikla *neutronová hvězda*. *Neutronové hvězdy* mají mez stability kolem 2,5 hmotnosti Slunce. Pokud takový *bílý trpaslík*, kde *elektrony* zadržují gravitační kontrakci, je součástí dvojhvězdy, tak se může stát, že na něj přetéká hmota z druhé složky, čímž zvětšuje svou hmotnost, až jednou překročí mez stability 1,4 hmotnosti Slunce a exploduje. Tyto exploze jsou charakteristické a vždy se tam uvolní zhruba stejné množství energie, z čehož můžeme určit jejich vzdálenost a dopočítat vzdálenost galaxie. Stačí tedy sledovat vzdálené galaxie a vyhledávat exploze *bílých trpaslíků*. Říká se jim *supernovy typu 1A*. V průměrné galaxii exploduje *supernova typu 1A* zhruba dvakrát za století. Takže stačí sledovat tisíce galaxií (což dnes automatizované systémy pozorování bez problému zvládají) a vždy tam statisticky naleznete nějaké *supernovy typu 1A*. Následně je třeba pořídit spektrum, ze kterého určíme rychlost vzdalování. Z toho, jak zasnívá, zjistíme vzdálenost *supernovy*, a tím vzdálenost galaxie. Pro ověřování kosmologických modelů je tedy potřebné mít objekty a znát jejich vzdálenosti a rychlosti.

Na konci 20. století běželo několik projektů, které se snažily zjistit takzvaný *decelerační parametr*. Pokud vesmír expanduje, pak na začátku, jako počáteční podmínka, musel existovat impulz pro expanzi. Zatím nevíme, co to bylo; mohl to být například nějaký fázový přechod, který vedl k *inflaci* a k rozhození látky. Pokud je ovšem ve vesmíru přítomná gravitace, tak bude brzdit expanzi. Jak bylo zmíněno v předchozím textu v kapitole o expandujícím vesmíru, může ji brzdit málo tak, že rozpínání bude pokračovat do nekonečna ($\rho < \rho_c$), může ji brzdit tak akorát, že se rozpínání zastaví v nekonečnu ($\rho = \rho_c$), nebo ji může brzdit natolik, že se vesmír vrátí do kolapsu ($\rho > \rho_c$). Každopádně ve všech těchto variantách je expanze bržděna gravitací. Při hledání *deceleračního parametru* se nejdále dostala skupina Adama Riese (Space Telescope Science Institute, Baltimore, 1998) a konkurenční skupina Saula Perlmuttera (Lawrence Berkeley National Laboratory, 1999). Obě tyto skupiny velmi záhy zjistili, že je něco špatně, protože *decelerační parametr* vycházel záporný, což znamená, že expanze vesmíru se zrychluje. A to nemůže dělat gravitace. Pracovně se to nazvalo *temná energie*. Od roku 1998 tedy víme, že expanze vesmíru je zrychlená. Dokonce víme, že ke zrychlené expanzi došlo někdy zhruba v polovině historie vesmíru. Do té doby byla bržděna tak, jak předpokládají Fridmanovy modely expanze. Objevitelé zrychlené expanze, Adam Riess (*1969), Brian Schmidt (*1967) a Saul Perlmutter (*1959), dostali za tento objev v roce 2011 Nobelovu cenu.

Co je *temná energie*? U *temné hmoty* vidíme alespoň nějaké struktury, které jsme schopni mapovat z gravitačního působení. V případě *temné energie* vidíme pouze zrychlenou expanzi vesmíru. Mělo by to tedy být nějaké fluidum bez struktury procházející celým vesmírem, které je homogenní a pravděpodobně se ani jeho hustota nemění s časem. Z těch desítek nápadů, které lidé měli, co by *temná energie* mohla být, od těch nejextravagantnějších až po ty nejvíce přízemní, zůstaly do dneška už pouze tři.

První možností je, že *temná energie* souvisí s kvantovou fyzikou, která v sobě obsahuje relace neurčitosti, jež neumožňují, abychom současně znali polohu a rychlost částice. Jak již bylo v tomto textu zmíněno, tyto relace jsou zodpovědné za takzvané *nulové kmity*; například ionty v krystalové mřížce při absolutní nule stále kmitají; nebo *nulová energie* (nejmenší energie) harmonického oscilátoru není nulová. Kvantová teorie funguje nejen na částice, ale i na pole, kde opět platí ty stejné relace neurčitosti; nemůže existovat současně nulová hodnota pole a nulová hodnota hybnosti pole. Důsledkem je, že vakuum nemůže být prázdné, ale musí obsahovat nějaké základní penzum fluktuací všech možných polí. Říkáme tomu *dynamické vakuum* a má různé velmi zajímavé vlastnosti, které dnes dokážeme velmi dobře měřit. A právě tato složka s konstantní hustotou energie, jak bylo zmíněno

v předchozím textu v analýze Einsteinovy rovnice pro *expanzní funkci*, vede na exponenciální rozpínání.

To je docela zajímavé, protože celá desetiletí jsme si mysleli, že vesmír je ovládán gravitací a najednou vidíme, že na úplném počátku gravitace selhává kvůli horkému a hustému prostředí, kde dominují kvantové procesy. Ale i v tomto pozdním věku 14 miliard roků jsou opět ve vesmíru dominantní kvantové procesy způsobující zrychlenou expanzi. Čili kvantové projevy látky nemůžeme zanedbat ani na počátku ani v průběhu ani v pokročilém věku vesmíru.

Další možností je takzvaná *kvintesence* (pátá esence), což znamená existenci páté interakce kromě již známé *elektromagnetické, silné, slabé a gravitační*. Ovšem současné experimenty tomu příliš nenapovídají.

Poslední možností je, že nerozumíme, jak funguje *gravitační* interakce. Je možné, že gravitace na malých vzdálenostech je přitažlivá a na obrovských kosmologických vzdálenostech už nemusí být nepřímo úměrná čtverci vzdálenosti. Může se projevit její hypotetická odpudivá složka. Existují celé skupiny fyziků, kteří se zabývají takzvaným *MONDem* (*Modified Newton Dynamics, Modifikovaná Newtonova dynamika*), kdy se pokouší modifikovat gravitační zákon tak, aby byl ve shodě se zrychlenou expanzí. Znamenalo by to vzdát se obecné relativity, což by byla obrovská škoda, protože je to nejúspěšnější teorie gravitace, kterou historicky máme. Existují i další pokusy, například Verlindeho gravitace. Erik Verlinde ukazuje, že ve skutečnosti mohou existovat pouze tři interakce, *elektromagnetická, silná a slabá*, to znamená pouze kvantové interakce, které se projevují navenek statisticky jako gravitační síla. Takže podle tohoto modelu není gravitační síla samostatná interakce, ale vnějším projevem vlastností velkého množství mikroskopických objektů. Verlindeho teorie dnes dává jiné výsledky než obecná relativita. Stojí na dvou zdrojích *entropie* – plošném a objemovém. A právě při zahrnutí objemového zdroje dává tato teorie odlišné výsledky, které splývají s obecnou relativitou pouze tehdy, když objemový zdroj *entropie* jde limitně k nule. Současné experimenty jsou zatím nejvíce ve shodě s energií fluktuací vakua.

8. ŽIVOTOPIS VESMÍRU

8.1 Problémy standardního kosmologického modelu

8.1.1 Problém počáteční singularity

Naprostoj největším problémem standardního kosmologického modelu je *počáteční singularita*. Pokud to počítáme z obecné relativity a jdeme limitně k počátku do času $t = 0$, pak dostáváme nekonečnou hustotu a nekonečnou teplotu. Je potřeba mít na paměti, že kdykoli se nám v teorii objeví lokalizované nekonečno, znamená to její selhání. Obecná relativita v tom extrémně hustém a horkém počátku vesmíru už nepopisuje stav látky dostatečně. K popisu toho, co se tam děje, jsou potřeba kvantové zákony, jako je *Pauliho vylučovací princip* a další, díky nimž se singularita nevyskytuje.

8.1.2 Problém plochosti

Druhým problémem je *problém plochosti*. Jak bylo uvedeno v předchozím textu, vesmír se nám jeví zhruba plochý, to znamená s téměř nulovou globální *křivostí*, což nevypadá podezřele do té chvíle, než si uvědomíme, že křivky ať už se zápornou nebo kladnou *křivostí* se v místě počátku stýkají a jestliže dnes po zhruba 14 miliardách let pozorujeme přibližně plochý vesmír, pak na počátku musel být nastaven s extrémní přesností na hodnotu $k \approx 0$ a na kritickou hustotu ρ_c . Kdyby se jenom nepatrně odchyloval, tak dnes jsme někde úplně jinde. Přesnost tohoto nastavení, abychom i po 14 miliardách letech viděli vesmír na *kritické hustotě s nulovou křivostí*, by musela být taková, že v době, které se říká *Planckův čas*, což je 10^{-43} sekundy (přirozený čas, který dostaneme kombinací *rychlosti světla*, *gravitační konstanty* a *Planckovy konstanty*), by hustota vesmíru musela být nastavena na *kritickou s přesností*:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = 10^{-59} \quad \text{v čase } t = 10^{-43}$$

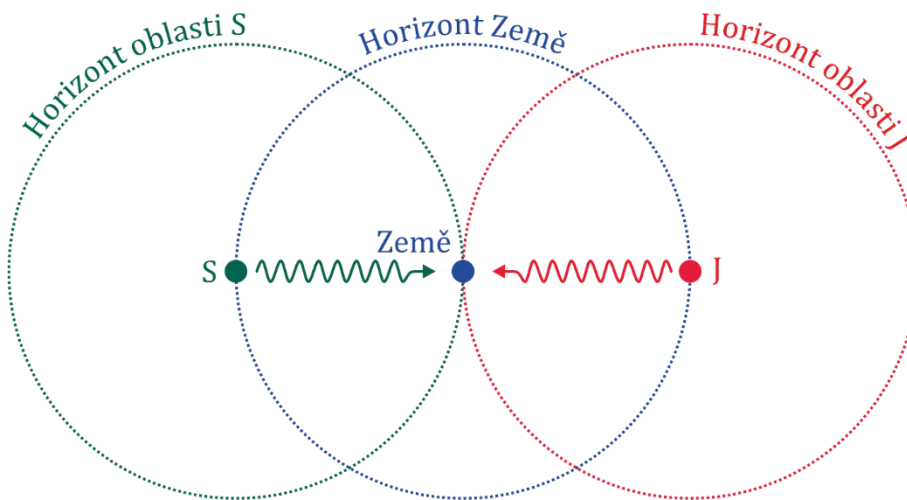
Což je naprostoj neuvěřitelné číslo. Otázkou je, proč má vesmír právě *kritickou hustotu*. Máme tři možnosti:

- (b) Prohlásíme to za Boží zázrak (tak to prostě někdo udělal), nebo
- (c) takové jsou počáteční matematické podmínky a nebudeme se tím dále zabývat, nebo
- (d) budeme hledat fyzikální mechanismy, které dokážou nastavit vesmír přesně na *kritickou hustotu*,

což jsme viděli například v předchozím textu v případě Einsteinovy rovnice pro *expanzní funkci*, kde bylo vidět, že pokud by na počátku existovala *inflační fáze*, kdy se vesmír rozpínal exponenciálně, tak *křivostní člen* jde efektivně k nule. Takže nastavení se pravděpodobně odehrálo v průběhu *inflační fáze*, neboli problém by mohl být řešitelný *inflací*.

8.1.3 Problém horizontu

Dalším problémem je *problém horizontu*. Je třeba vědět, že z vesmíru vidíme jenom omezenou část:



Někdy před 14 miliardami let byl vesmír všude horký a hustý, to znamená, že i v místě, kde se nacházíme. Na konci *Velkého třesku* se oddělilo záření od látky. Záření, které se nacházelo například v prostoru, kde je dnes Země, doputovalo za dobu od konce *Velkého třesku* do současnosti k oblasti nazvané *Horizont Země*. Na první pohled by se zdálo, že toto záření uletělo 14 miliard světelných let, což ovšem není pravda. Protože vesmír současně expanduje, tak světlo uletělo větší vzdálenost. Podle různých modelů se odhaduje, že to bylo mezi 40 až 50 miliardami světelných roků. Platí to i obráceně. My zde rovněž detekujeme *reliktní záření*, ovšem toto záření nevzniklo u nás, ale v místech, kam doletělo záření od nás. Podíváme-li se kterýmkoli směrem, tak uvidíme ve vzdálenosti, která časově odpovídá přibližně 14 miliardám roků, závěr *Velkého třesku*. Na první pohled se to může zdát divné, že *Velký třesk* vidíme ve všech směrech, ale pokud si uvědomíme, že vesmír expanduje ze všech svých míst (platí kosmologický princip), pak to divné není. Nejdále se tedy můžeme dívat po takzvaný *horizont*, což je jediná hranice, na kterou narazíme. Je to tedy hranice časová. Pokud se podíváme do vzdálenost, která časově odpovídá 14 miliardám roků, což je vzdálenost 40 až 50 miliard světelných let, uvidíme *Velký třesk*, přestože už tam dnes žádný není. Podobně kdyby se někdo díval z *horizontu* směrem k nám, viděl by *Velký třesk* u nás, i když tady už rovněž žádný není. Tedy všechno to vidíme se zpožděním. Každý pozorovatel kdekoli ve vesmíru má svůj *horizont pozorovatelného vesmíru*, za který vidět nemůže. Musíme si tedy uvědomit, že z celého vesmíru vidíme pouze velmi omezenou část. Nemůžeme vidět vzdálenější věci, protože z nich k nám světlo ještě nedoletělo. Počkáme-li například dvě miliardy let, uvidíme zase o něco dále, protože se nám o tuto dobu posune i *horizont*. Takže *horizont* se mění s časem.

8.1.4 Problém komunikace

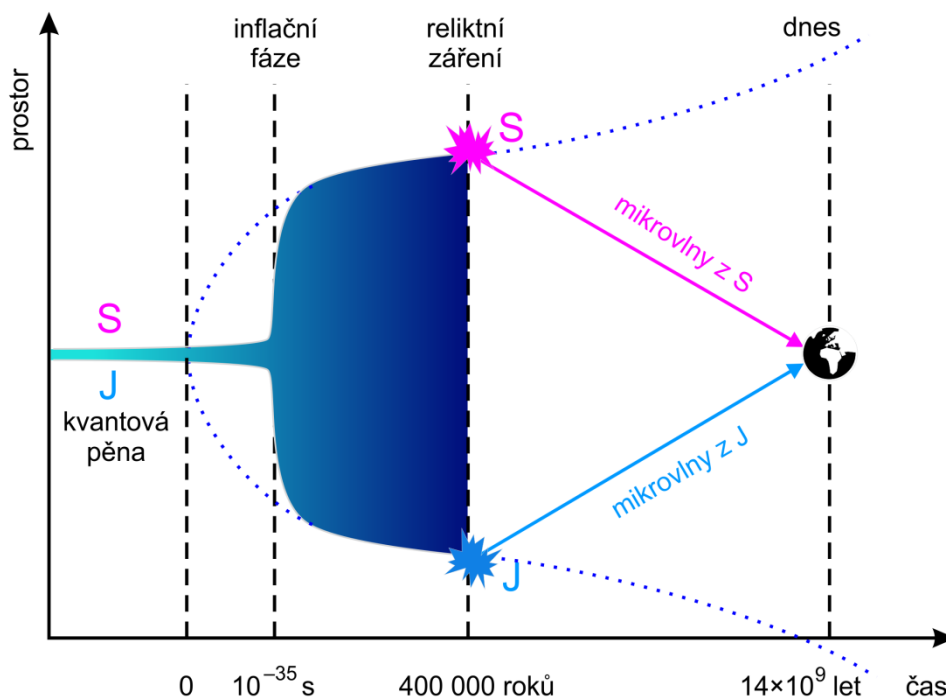
Ve všech směrech vesmíru vidíme přibližně stejné struktury. Ovšem mezi oblastí *S* a *J* nikdy žádný foton neprošel, protože by to trvalo 28 miliard let. Tak dlouho vesmír neexistuje. Tudíž oblasti *S* a *J* spolu nikdy nemohly komunikovat. Říkáme, že jsou kauzálně nesvázané. Vesmír je složen z mnoha takto kauzálně nesvázaných oblastí, které spolu v principu nemohly komunikovat, protože světlo nemělo dostatek času, aby doletělo z jedné dané oblasti do druhé. Nabízí se otázka, proč tyto struktury jsou stejné ve všech směrech, když tyto oblasti nemohly spolu komunikovat. Opět nám pomůže *inflace*. Jestliže existovala *inflační fáze*, pak v době před *inflací* byly oblasti tak blízko, že spolu světelně komunikovaly. Nyní už nekomunikují, protože jsou tak vzdálené, že jsou *kauzálně nesvázané*.

8.2 Modely vesmíru

Jsou to klasické problémy standardního modelu, nad kterými se musíme zamýšlet a vždy si musíme uvědomit, že z vesmíru vidíme pouze omezenou část, ze které k nám stihlo přiletět světlo. Experimentálně jsme schopni dojít do časů 10^{-13} sekundy. Do toho okamžiku jsou naše úvahy relevantní. V časech kratších jsou to pouhé sny, fantazie, maximálně hypotézy o tom, jak by to mohlo být. Pokud se poučíme z minulosti, tak s největší pravděpodobností to pravdivé nebude, protože zatím všechny naše názory v minulosti o tom, jak funguje vesmír, byly mylné.

Vesmír dnes expanduje zrychlenou expanzí. Předtím byla expanze brzděná, protože převládala gravitační interakce. Pokud podle obecné relativity půjdeme zpět v čase, pak dojdeme do času $t = 0$, kde nastane problém ve formě nekonečné hustoty, nekonečné teploty, nekonečné hodnoty *Hubbleovy konstanty* a podobně. Je to něco, čemu říkáme *singularita*. Pokud budeme rovněž uvažovat kvantové zákony, pak platí *relace neurčitosti*, které zabrání tomu, aby se částice látky dostaly blízko k sobě, to znamená zabrání nekonečné teplotě a hustotě. Pokud je správná vize oddělování interakcí, kdy na počátku existovala nějaká jediná prasíla, ze které vznikla *gravitační interakce*, *silná interakce*, *slabá interakce* a *elektromagnetická interakce*, pak je podle teoretických výpočtů docela možné, že při oddělení *silné interakce* došlo k jakémusi fázovému přechodu. Poznamenejme, že ve vesmíru muselo docházet k velkému množství fázových přechodů, protože každá látka z extrémní teploty postupně prochází mnoha fázovými přechody. Při fázovém přechodu se vždy uvolňuje energie a oddělením silné interakce se uvolnilo tolik energie, že to vesmír pravděpodobně „rozfouklo“, což by mohla být ona *inflační fáze*.

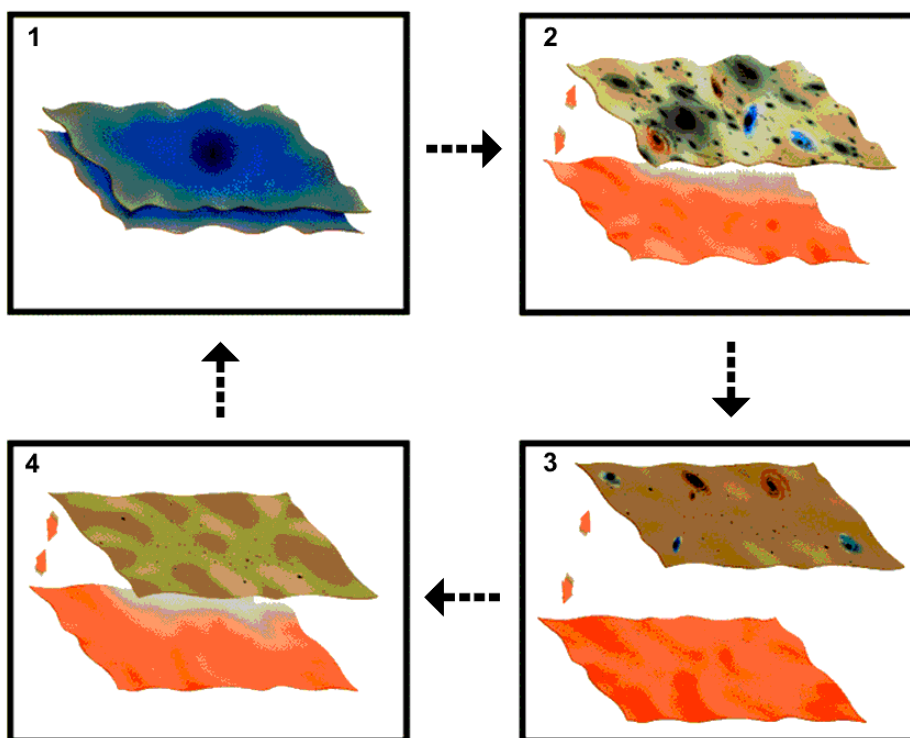
8.2.1 Model hlavního proudu



Před *inflací* platily kvantové zákony, kdy existovala jakási kvantová pěna. Po *inflaci* existuje již normální vesmír, který expanduje. V čase 380 tisíc roků se v něm vytvářejí atomární obaly a dále struktury, které dnes pozorujeme. Otázkou je, kam umístit časovou nulu. Jestli do místa, kde se protnou teoretické křivky obecné relativity, kde tato teorie selhává, nebo spíše do místa *inflace*, to znamená počátku fázového přechodu (přechodu z kvantové pěny neboli kvantových fluktuací do uspořádaného vesmíru). Pokud toto přijmeme, pak se musíme zamýšlet nad smyslem času, protože čas, jak jej vnímáme, je dán obecnou relativitou. Čas je dán přítomností těles, která jej spoluvytvářejí. V průběhu *inflace* ještě žádná tělesa nebyla a před *inflací* už vůbec ne, čili je otázkou, jestli má vůbec smysl říkat před a potom. Čas možná vzniká teprve v průběhu *inflační fáze*, dál začíná mít smysl, ale předtím čas vůbec žádný smysl nemá a vůbec nemusel existovat. Může to být pouze nějaký parametr rovnic. Takže vize hlavního proudu je taková, že na počátku byly nějaké kvantové fluktuace, došlo k fázovému přechodu, pravděpodobně oddělení *silné interakce*, což mělo za následek obrovskou *inflaci* (prudký nárůst rozměrů), což efektivně vyhladilo vesmír na plochý a znemožnilo komunikaci vzdálenějších oblastí.

8.2.2 Ekpyrotický model

Ekpyrotický model navrhli v roce 2001 Neil Turok, Paul Steinhardt, Burt Ovrut a Justin Khoury jako alternativu k inflačnímu modelu. Tento model předpokládá fungování teorie strun nebo nějakou dobu sjednocení interakcí založenou na vícerozměrném světě, kde naše čtyři dimenze jsou pouze jedněmi z mnoha. Kromě těchto dimenzí by měly existovat takzvané svinuté dimenze, které nevnímáme a které jsou malé. Pokud je to pravda, pak je možný scénář, že v mnohorozměrném světě existují méně rozměrné vesmíry. V modelu si je zjednodušeně znázorňujeme pokřivenými plochami. Například je to jako list dvourozměrného papíru ve třírozměrném světě a podobně. Obecně jsou to čtyřrozměrné vesmíry v desetirozměrném nebo dvacetirozměrném světě. Ty „listy“ jednotlivých vesmírů nejsou zcela „rovnné“ a proto je tedy možné, že takový náhodný dotyk dvou pravesmírů, které ani nemusely mít stejný počet dimenzí, v místech nějakých fluktuací způsobil to, čemu dnes říkáme *Velký třesk* a odstartoval tvorbu látky a struktur, které dnes pozorujeme. Je možné, že i v tom druhém vesmíru to proběhlo podobně jako v našem. Možná že gravitace funguje i mezi těmito pravesmíry a jednou, až se náš vesmír dostatečně rozepne zrychlenou expanzí a všechno v něm zmizí, způsobí gravitace opět přitažení obou vesmírů a v nějakém místě k tomu dojde znovu. Tento cyklus by se mohl opakovat stále dokola. Vesmíry se dotknou, v jednom nebo v obou vzniknou struktury, oddalují se od sebe, samostatně expandují, pak mezi nimi převládne gravitace a začnou se opět přibližovat a tak dále:



Tento model je na první pohled přitažený za vlasy a můžeme přemýšlet, proč vlastně potřebujeme nějaké další vesmíry k tomu, abychom vysvětlili vznik našeho vesmíru. Turok a Steinhardt si proto dali tu práci a spočítali, jaké gravitační vlny vzniknou při dotyku takových pravesmírů a předpověděli spektrum takzvaných *reliktních gravitačních vln*, neboli předpověděli, jakou intenzitu budou mít jednotlivé vlnové délky. Nyní už stačí zachytit *reliktní gravitační vlny*, a pokud to spektrum bude jiné, pak tento model můžeme vyloučit a dále se jim nemusíme zabývat. Pokud zachycené spektrum bude stejné, ještě neznamená, že tento model je správný, protože i jiné modely mohou dát stejné spektrum gravitačních vln. Znamenalo by to, že tento model nesmíme vyloučit. Poznamenejme, že *inflační model* dává jiné spektrum gravitačních vln (dokonce přesně obrácené). Experimentálně tedy lze ověřit modely.

8.2.3 Další vize

Velmi populární jsou modely vesmírů typu multiversum z nějakého mnohorozměrného světa, kde existuje mnoho vesmírů různých vlastností. Další vizí je vznik vesmíru z *černé díry*, což se dosti často tvrdí. O Schwarzschildově řešení jsme se již zmiňovali, a proto víme, že je řešením pro vnějšího

pozorovatele, který je vůči *černé díře* statický. Není to tedy ani řešení padajícího pozorovatele. Takže předpoklad, že vesmír je *černou dírou*, neobstojí, protože ve vesmíru platí *Fridmanova metrika* nikoli *Schwarzschildova*. Tento model byl upraven tak, že opět přepokládáme extradimenze neboli mnohorozměrný svět, kde *černá díra* přiletí z nějaké extradimenze a vygeneruje náš vesmír.

8.3 Současné představy fyziky a klíčové momenty

8.3.1 Čas $t = 10^{-43}$ s, $T = 10^{32}$ K, $E = 10^{19}$ GeV, $\rho = 10^{94}$ g/cm³

Pokud zkombinujeme tři základní fyzikální konstanty, což jsou rychlost šíření světla c , gravitační konstantu G a Planckova konstantu \hbar do mocninné závislosti, tak zjistíme, že existuje jedna jediná kombinace, která nám dá *čas*, jedna jediná kombinace, která nám dá *hmotnost*, jedna jediná kombinace, která nám dá *teplotu* a podobně.

Kombinace, která nám dá *čas*, se nazývá *Planckův čas* a je to 10^{-43} sekundy. Je to jakási přirozená jednotka času ve vesmíru. Nevíme, co čas znamená, ale představa je taková, že tady mohl být nějaký mnohorozměrný svět, kdy existovala *supersymetrie*, což znamená, že každá částice existovala ve dvou provedeních. V jednom provedení, kde platí *Pauliho vylučovací princip* a částice je *nesnášenlivá* vůči ostatním částicím stejného druhu (*fermiony*), a ve druhém provedení, pro který neplatí *Pauliho vylučovací princip* a částice je *snášenlivá* vůči částicím stejného druhu (*bosony*). Takže v této pradávne minulosti mohl existovat nejenom *elektron*, který si nikdy „nesedne“ do stejného kvantového stavu s jiným *elektronem*, ale také *selektron*, který dělá přesný opak, podobně jako dnes existuje *foton*, který může být ve stejném kvantovém stavu s jiným *fotonem* nebo více *fotony* a hypotetické *foto*, které má opačné vlastnosti než *foton* a nemůže být ve stejných kvantových stavech. Často se do tohoto času 10^{-43} sekundy dává oddělení *gravitační interakce*, kdy začíná platit obecná relativita. V tomto počátku by ale jednoznačně mělo dominovat záření nad látkou, kdy je *expanzní funkce* $R(t)$ úměrná $t^{1/2}$. To je období, kdy rovněž mohla probíhat *inflační fáze*, to znamená, že oddělení *gravitační interakce* od ostatních mohlo vytvořit *inflaci* stejně, jako oddělení *silné interakce*. Možná těch *inflačních* fází mohlo být více. Možná každý fázový přechod vesmíru způsobil nějakou *inflaci*.

Pokud zkombinujeme základní fyzikální konstanty c , G a \hbar , můžeme dostat také ostatní jednotky. Například energie E by měla být 10^{19} GeV, což se interpretuje jako průměrná energie jedné částice; přirozená hustota ρ vychází 10^{94} g/cm³, což by mohla být hustota vesmíru při jeho zrodu; teplota T vychází 10^{32} K, což je zvláštní číslo (je převedena ze vztahu $mc^2 = kT$). Pokud by to byla nějaká maximální možná teplota na počátku, pak by to znamenalo, že nemůže existovat vyšší teplota než tato hodnota, která je dána počáteční podmínkou. Někteří fyzikové si myslí, že máme pouze absolutní nulu a nejvyšší možnou teplotu nemáme, to znamená, že vždy můžeme systém ohřát na vyšší teplotu. Jiní říkají, že existuje také „absolutní horko“, což je nejvyšší možná teplota daná touto hodnotou.

8.3.2 Čas $t = 10^{-39}$ s, $T = 10^{29}$ K, $E = 10^{16}$ GeV, $\rho = 10^{84}$ g/cm³

Prozatím stále věřme, že existují vícerozměrné světy. V tento okamžik by zde měly být 3 interakce, což je *elektromagnetická*, *silná* a *slabá*, spojené do jedné *prainterakce*. *Gravitace* se oddělila v čase 10^{-43} sekundy a tyto tři zbývající interakce jsou stále součástí té původní *prainterakce*. Dohromady se tyto 3 zbývající kvantové interakce nazývají *GUT (Grand Unified Theory, Teorie Velkého sjednocení)*. Je to jedna interakce dohromady, *elektromagnetická*, *silná* a *slabá*. Podlé této teorie by zde měly existovat polní částice X a Y , které dokážou převádět *leptony* na *kvarky* a naopak. Pokud je to pravda, pak by měl existovat rozpad *protonu*, což znamená, že by *proton* měl být nestabilní částicí. *Proton* je složený z *kvarků* d, u, u a *kvarky* u by mohly být částicí X převedeny na *leptony*. Podle odhadů by to měl být proces s obrovským poločasem rozpadu větším než 10^{34} sekundy, což je podstatně déle než celá existence vesmíru. Nedostatek času se dá sice kompenzovat sledováním obřích nádrží s velkým množstvím protonů, ovšem zatím nebyl žádný rozpad pozorován.

8.3.3 Čas $t = 10^{-35}$ s, $T = 10^{27}$ K, $E = 10^{14}$ GeV

V tomto okamžiku by se měla oddělovat *silná interakce*, což znamená narušení *GUT symetrie*. Od této chvíle tedy máme *gravitaci*, *silnou interakci* a *elektroslabou interakci*, která se ještě neoddělila. Oddělení *silné interakce* je docela dobře teoreticky zmapované a mělo by se při něm uvolňovat velké množství energie, které by mělo vést k *inflaci*. Čas 10^{-35} sekundy je tedy nejpravděpodobnějším okamžikem, kdy by mohlo dojít k *inflaci*. Dokonce je spočítané, že tato *inflace* trvala 10^{-37} sekundy. Stále probíhají pomocí polních částic *X* a *Y* vzájemné přechody mezi *kvarky* a *antileptony*, *antikvarky* a *leptony*, kdy je udržována rovnováha mezi hmotou a antihmotou. Je zde stejné množství hmoty a antihmoty.

8.3.4 Čas $t = 10^{-30}$ s, $T = 10^{25}$ K, $E = 10^{12}$ GeV

Tato teplota (energie) by měla být již srovnatelná s klidovou hmotností a klidovou energií polních částic *X* a *Y*, což znamená, že už nemohou samovolně vznikat. To znamená, že pro jejich vznik je třeba více energie; jakmile energie poklesne pod klidovou energii těchto částic, nemohou již vznikat samovolně, což znamená, že postupně vymírají. To má za následek stále menší množství přechodů mezi *kvarky* a *leptony*. Předpokládá se, že tady někde v tomto čase došlo k narušení takzvané *CPT symetrie*:

- *P-symetrie* je *paritní symetrie*, což je symetrie mezi levým a pravým. Je to v podstatě zrcadlová symetrie, kdy jsme schopni realizovat jakýkoliv fyzikální proces jeho zrcadlovým obrazem. Jak dnes víme, levo-pravá symetrie v přírodě neplatí vzhledem k tomu, že například neexistují žádná pravotočivá neutrína, která by byla zrcadlovým obrazem těch levotočivých. V roce 1956 bylo při rozpadu *kaonu* vidět, že levý a pravý směr není zaměnitelný (probíhají různě); v roce 1957 se dělal přelomový experiment na Kolumbijské univerzitě s rozpadem *kobaltu*, při kterém se jednoznačně prokázalo, že levo-pravá symetrie při *slabé interakci* neplatí. Takže nelze zkonstruovat přístroj podle zrcadlového obrazu tak, aby se choval stejně jako originál.
- Protože *neutrína* jsou jenom levotočivá a *antineutrína* jenom pravotočivá, tak bychom mohly přístroj zkonstruovat z antihmoty. Otázkou tedy je, zda lze zkonstruovat zařízení podle zrcadlového obrazu, ale z antihmoty, ve kterém budou zastoupeny všechny interakce, a aby se toto zařízení chovalo stejně jako originál. Tomuto se říká *CP symetrie*. *C* je od slova *charge* neboli náboj a znamená výměnu všech nábojů za opačné; *P* je od slova *parity* neboli levo-pravá. V roce 1964 se ukázalo, že ani takováto symetrie v přírodě neplatí. To znamená, že nestačí vyměnit levý za pravý a nahradit částice antičásticemi a naopak. Nejprve se to prokázalo ve *slabé interakci*, dnes už víme, že to nefunguje ani v *silné interakci* a domníváme se, že tato asymetrie je pravděpodobnou příčinou toho, že je dnes ve vesmíru větší množství hmoty než antihmoty.
- Prozatím věříme, že funguje takzvaná *CPT symetrie*, kde *T* znamená čas. *Časová symetrie* znamená, že se děje odehrávají obráceně neboli pozpátku. Takže by se například vyrobilo zařízení z antihmoty podle originálu v zrcadle a pustilo by se v čase pozpátku, neboli nafilmovalo by se, jak zařízení funguje, koncový stav by se vzal za počáteční a záznam by se pustil pozpátku. Pak teprve by to mělo být symetrické.

Pokud tedy došlo k nějakému narušení *CP symetrie* už v čase 10^{-30} sekundy, tentokrát v *silné interakci*, tak by podle výpočtů stačilo narušení velmi nepatrné, aby se změnil stav ve prospěch hmoty tak, že na miliardu částic antihmoty by existovala miliarda plus jedna částice hmoty. Toto nepatrné narušení symetrie bohatě stačí na to, aby se vysvětlil současný stav.

8.3.5 Čas $t = 10^{-10}$ s, $T = 10^{15}$ K, $E = 10^2$ GeV

Je to nejdůležitější okamžik, protože jej dokážeme ověřit experimenty. Tedy od tohoto okamžiku dále je vše, co je v této části napsáno, již vysoce pravděpodobné. V tomto okamžiku 10^{-10} sekundy došlo k rozštěpení *elektroslabé interakce* na *elektromagnetickou* a *slabou*. Předtím při vyšších energiích zde byla pouze jedna jediná interakce *elektroslabá*, která měla čtyři polní částice s nulovou hmotností a nekonečným dosahem. V tomto okamžiku pomocí Higgsových částic získaly tři z těchto částic Z_0 , W_+ a W_- hmotnost; pouze jedna z nich, *foton*, si ponechal nulovou hmotnost. Tím došlo ke stavu, že

elektromagnetická interakce má nekonečný dosah a *slabá interakce* má dosah 10^{-17} metru. Od této chvíle se tedy tyto interakce chovají různě. Nyní již máme všechny čtyři interakce tak, jak je známe dnes – *gravitační, elektromagnetickou, silnou a slabou*. Toto je počátek vesmíru, jak ho známe.

8.3.6 Čas $t = 10^{-5}$ s, $T = 10^{13}$ K, $E = 1$ GeV

Někde v tomto okamžiku docházelo k hadronizaci látky, což znamená, že *kvark-gluonové plazma* prošlo fázovým přechodem, při kterém začala fungovat *silná interakce*. Gluonové pojivo spojilo kvarky do trojic (*baryony*) nebo dvojic *kvark-antikvark (mezony)* a vznikají částice, kterým říkáme *hadrony*. Z *baryonů* nás nejvíce zajímá *neutron* a *proton*, což jsou částice atomového jádra.

8.3.7 Čas $t = 1$ s, $T = 10^{10}$ K, $E = 1$ MeV

Energetické podmínky už byly takové, že *neutrina* přestala interagovat s látkou a oddělila se. Je narušena termodynamická rovnováha *neutrin* s látkou a vznikají takzvaná *reliktní neutrina* (dnes mají *reliktní neutrina* teplotu 1,96 K a je jich přibližně 300 v centimetru krychlovém). Výsledkem oddělení *neutrin* je narušení rovnováhy mezi *neutrony* a *protony*. Volné *neutrony* se samovolně rozpadají na *protony, elektrony* a elektronová *antineutrina*. Důsledkem je klesající počet volných *neutronů* a rostoucí počet *protonů*. V řádu minut jsou již podmínky pro vznik lehkých jader, kdy zachycené *neutrony* se stávají součástí větších celků, ve kterých, jako vázané, jsou stabilní.

8.3.8 Čas $t = 3$ s, $T = 6 \cdot 10^9$ K, $E = 500$ keV

V době 1 až 15 sekund dochází k anihilaci, kdy *elektrony* anihilují s *pozitrony* za vzniku elektromagnetického záření, což znamená, že se energie *elektronu* a *pozitronu* přemění na energii elektromagnetického záření. To má za následek ohřátí vesmíru asi o 40 procent. Ovšem toto ohřátí se již netýká *neutrin*, protože *neutrina* již v tuto chvíli neinteragují s látkou. Ta se oddělila v jedné sekundě. Proto mají *reliktní neutrina* nižší teplotu 1,96 K než *reliktní elektromagnetické záření*, což je 2,73 K, protože toho se týkal ohřev při anihilaci, kdy miliarda *elektronů* anihilovala s miliardou *pozitronů* a jeden *elektron* zůstal navíc pro budoucnost díky asymetrii. V podstatě je celý vesmír stvořen ze zbytků po anihilaci.

8.3.9 Čas $t = 4$ min, $T = 10^9$ K, $E = 90$ keV

V době od 1 do 10 minut probíhá spojování *neutronů* a *protonů* do větších celků. V čase kratších to ještě není možné kvůli vysoké průměrné energii, a tím následnému opětovnému rozbití vniklých celků; v časech pozdějších to už není možné, protože srážky jsou málo pravděpodobné kvůli klesající hustotě způsobené rozpínáním vesmíru a také rychle ubývá volných *neutronů* kvůli jejich nestabilitě. V této době mohl existovat samotný *proton*. Pokud by byl nestabilní, tak jeho poločas rozpadu je 10^{34} sekundy a více, takže se v podstatě jedná o stabilní částici, Nestabilní je *neutron* a *tritium*. Vše ostatní, jako *deuterium, helium-3, helium-4, lithium-6, lithium-7* je stabilní. Větší celky než *lithium-7* neměly šanci vzniknout, protože při těchto srážkách není pravděpodobné, že by se srazilo více částic dohromady a vytvořilo větší celek. Poměr počtu *baryonů* k počtu *fotonů* je dnes přibližně $0,6 \cdot 10^{-9}$. Na jeden *baryon* tedy připadá přibližně jeden a půl miliardy *fotonů*, které tu zbyly jako pozůstatek po téměř kompletní anihilaci částic a antičástic.

8.3.10 Čas $t = 380\,000$ let, $T = 5\,000$ K, $E = 0,4$ eV

V době 380 000 let definitivně končí *Velký třesk*, končí éra plazmatu, lehká atomární jádra si odchytávají volné *elektrony* a vznikají neutrální atomy, jak je známe dnes. Pro vesmír je to velká změna, protože vesmír s volnými *elektrony* je plazmatem, který nepropouští elektromagnetické záření. Toto záření se rozptýluje na volných *elektronech* tím, že jim předává energii, ty se rozkmitají a znovu ji vyzáří v náhodném směru. Jakmile jsou *elektrony* součástí atomárních obalů, tyto procesy zmizí, protože elektromagnetická vlna už nemůže vázaný *elektron* rozkmitat; *elektron* má v obalu fixní energii; záření jej může pouze vybudit na vyšší energetickou hladinu, pokud má správnou energii; *elektron* může také spadnout na nižší hladinu; to jsou ale procesy vázané na konkrétní energii nikoliv

na libovolnou procházející vlnu. Obecně tedy platí, že plazma je neprůhledné a neutrální plyn je průhledný. Takže s koncem *Velkého třesku* se odděluje elektromagnetické záření od látky a to je to, co dnes zachytáváme jako *reliktní záření*. *Reliktní záření* představuje jakousi neproniknutelnou stěnu, za kterou nevidíme. Pozorujeme v ní ale nějaké struktury, ze kterých můžeme dopočítávat, jak vesmír vypadal předtím. Prostřednictvím elektromagnetického záření již není možné proniknout dále do oblasti *Velkého třesku*. Musíme k tomu použít buď *reliktní neutrina* z období jedné sekundy, nebo *reliktní gravitační vlny* z počátku.

Po *Velkém třesku* nastává období *temného věku*, kdy je zde neutrální plyn. *Temný věk* končí zrodem prvních hvězd, které ionizují svým ultrafialovým zářením okolí, čímž vytvářejí opět volné *elektrony* a vesmír se stává slabě ionizovaným, tedy plazmatickým. Masivní populace prvních hvězd přišla přibližně 550 milionů let po začátku, což víme z polarizace *reliktního záření*, protože elektromagnetické záření, to znamená i *reliktní záření*, se rozptýluje na volných elektronech a získává tak charakteristickou polarizaci.

Na počátku bylo těch prvních hvězd ještě málo, takže nedokázaly dostatečně ionizovat okolní prostředí tak, abychom to pozorovali, ale dokázaly jej excitovat. Díky tomu se podařilo nalézt čáru excitovaného vodíku 21 cm protaženou expanzí vesmíru na 4 metry a ukázalo se, že první hvězdy už tady byly 160 milionů let po začátku. Fakta tedy jsou, že 380 tisíc let po začátku končí *Velký třesk*, první hvězdy se objevují v době 160 milionů let a 550 milionů let po začátku je již populace prvních hvězd zastoupena tak výrazně, že jsou schopny ionizovat i okolní prostředí a vytvářet polarizaci *reliktního záření*.

8.3.11 Čas $t = 550\,000\,000$ let, $T < 200$ K, $E < 20$ meV

První hvězdy byly velmi hmotné, řádově 100 Sluncí, což znamená, že uvnitř byl vysoký tlak a teplota a termojaderná fúze probíhala výrazně rychleji, než v dnešních hvězdách. Jejich životní cyklus se pohyboval řádově v desítkách, maximálně stovkách milionů roků. Probíhala v nich termojaderná syntéza, ve které se nejprve slučovaly *protony* na *helium*, což je reakce hvězd *hlavní posloupnosti*, později, když došel *vodík*, dochází k restrukturalizaci hvězdy a k dalším procesům vedoucím ke zhroucení jádra a zvýšení teploty, kdy výsledkem je zapálení následných reakcí až po *železo*, které je nejlépe vázaným prvkem. Poznamenejme, že pokud máme hmotnější prvky než *železo*, můžeme získávat energii štěpením (jaderné elektrárny), pokud máme jádra s malou hmotností, můžeme získávat energii jejich slučováním. Optimální je energie jádra *železa*. Jinými slovy, abychom získali energii, větší jádra než *železo* musíme rozbít, menší jádra než *železo* sloučit. Menší jádra se slučují na těžší ve hvězdách, těžší jádra umíme štěpit na lehčí v našich jaderných reaktorech. Obojí umíme v bombách. Extrémně těžké prvky, které se rovněž nachází v přírodě, vznikaly v závěrečných fázích života těchto prvních hvězd při jejich explozích. Tyto hvězdy explodovaly jako velice rozsáhlé *supernovy*. V prostředí jejich rázových vln bylo dostatek energie na zatlačení *neutronů* do jader, aby vznikla velmi těžká jádra až po olovo, uran a podobně. Některé prvky jsou zastoupené více, jiné méně. Velmi dobře vázaná je *alfa* částice (dva *protony* a dva *neutrony*), což je jádro *hélia*, a ta se velmi dobře váže do větších celků. Například tři *alfa* částice představují *uhlík*, který je ve vesmíru jedním z nejhodnější zastoupených prvků; čtyři *alfa* částice představují *kyslík*. Jsou to vysoce zastoupená jádra. Možná proto je život postaven na *uhlíku* a *kyslíku*, protože jsou to jádra, která ve hvězdách snadno vznikají. Pokud bychom pominuli *helium*, které je málo reaktivní tím, že má uzavřené elektronové slupky, tak z těch reaktivních máme *vodík*, *uhlík*, *kyslík*; v tomto pořadí jsou zastoupeny ve vesmíru. Proto se nemůžeme divit, že se ve hvězdných mlhovinách nachází voda a podobně. Zajímavé u *supernov* je, že většinu energie odnáší *neutrina*.

8.3.12 Čas $t = 7\,000\,000\,000$ let

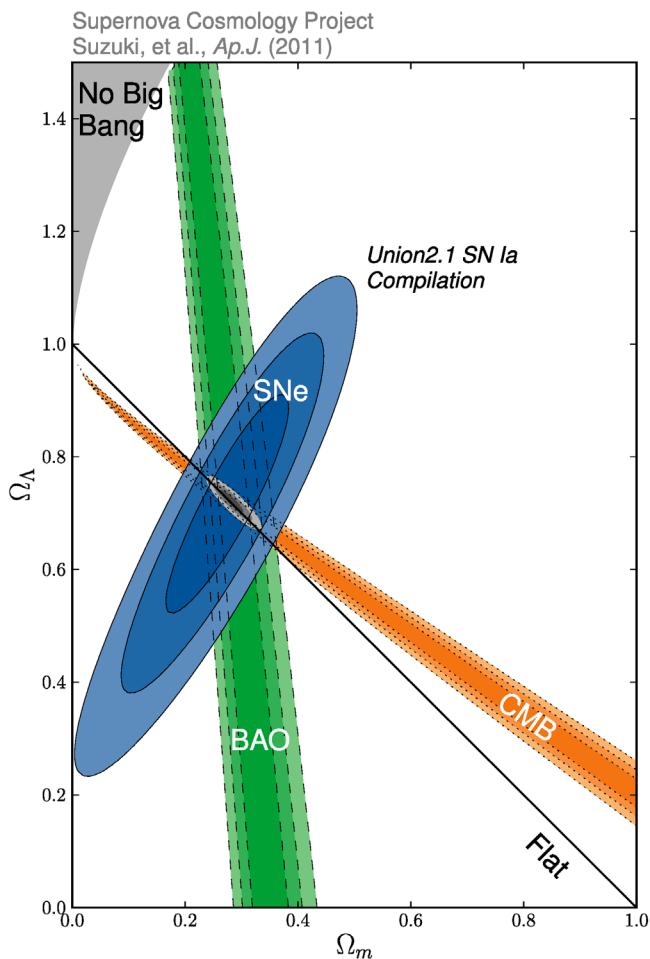
Zhruba v polovině existence vesmíru nastupuje *zrychlená expanze*, což se dnes zdůvodňuje existencí takzvané *temné energie*. Otázkou je, co to vlastně je a jak to funguje. Může se jednat buď o nějakou další interakci, nebo se jedná o *vakuové fluktuace*, což se jeví jako nejpravděpodobnější. Nebo prostě nerozumíme gravitaci (možná má gravitace také odpudivou složku) a je třeba tyto věci přepracovat. Nicméně to, co pozorujeme, je zrychlená expanze, kterou nám umožnily pozorovat *supernovy typu 1A*. *Supernova typu 1A* je *bílý trpaslík* obíhající kolem jiné hvězdy, ze které saje látku. *Bílý trpaslík* má mez

stability 1,4 hmotnosti Slunce, takže pokud té látky nasaje moc, exploduje jako *supernova* a vždy se uvolňuje přibližně stejné množství energie. Tento mechanismus vygeneruje v průměrné galaxii dvě exploze za století, a pokud sledujeme velké množství galaxií, tak tu a tam zaznamenáváme exploze *supernov typu 1A*. Pomocí nich odhadneme vzdálenost, pořídíme spektrum, zjistíme rychlost vzdalování a tak dále.

8.3.13 Čas $t = 14\,000\,000\,000$ let

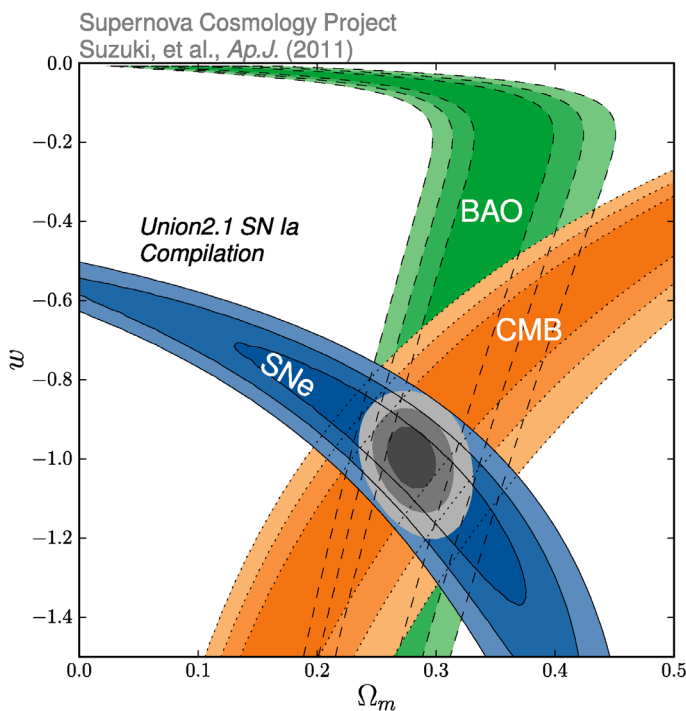
Toto je naše současnost, kdy se díváme, proč je všude kolem spousta galaxií a proč je ten svět takový, jaký je. První historický snímek, který odstartoval honbu za *hlubokými poli*, pochází z roku 1995 z Hubbleova dalekohledu. Hubbleův dalekohled byl na deset dní 18. až 28. prosince namířen na jedno místo ve vesmíru v souhvězdí Velké Medvědice do velmi malé oblasti o rozměru 2,5 obloukové sekundy. Záměrně se vybralo takové místo, kde nic nebylo vidět. Pořídilo se 342 snímků s expozicí od 15 do 40 minut. Výsledek je fantastický. V místě, kde nebyly žádné hvězdy, je jedna galaxie vedle druhé. Na snímku je zhruba 2 000 galaxií v úhlu 2,5 obloukové sekundy v nejrůznějších stupních vývoje. Tento experiment se pak provedl ještě jednou v roce 1998 na jihu v souhvězdí Pece, abychom získali průměrný obraz ze severu i z jihu, čímž se potvrdilo, že toto je skutečně průměrný obraz našeho vesmíru. V roce 2004 se pozorování ještě zdokonalilo a udělalo se *Hubbleovo ultra hluboké pole*, opět v jižní oblasti souhvězdí Pece, tentokrát oblast 11 obloukových minut. Pořídilo se 800 snímků. Snímkování probíhalo od 24. září 2003 do 16. ledna 2004 s expozicí 21 minut ve vizuálním a infračerveném oboru. Zaznamenalo se celkem 10 000 galaxií.

Supernova Cosmology Project navazoval na objev zrychlené expanze. Od roku 1998 do roku 2010 se zaregistrovalo obrovské množství *supernov typu 1A*. Bylo jí více než 500. Následně se spojily výsledky ze tří různých způsobů měření zrychlené expanze:



Na obrázku na vodorovné ose je *omega parametr* Ω_m týkající se poměrného zastoupení hmoty (atomární látka a *temná hmota*); na svislé ose je poměrné zastoupení *temné energie* Ω_Λ . Výsledky pozorování ze *supernov typu 1A* podle různé statistické významnosti *SNe* se nachází v modré oblasti; výsledky analýzy fluktuací *reliktního záření CMB* (*Cosmic Microwave Background, kosmické mikrovlnné pozadí*) obsahuje oranžová oblast; výsledky studia velkorozměrových struktur *BAO* (*Baryonic Acoustic Oscillation, baryonové akustické oscilace*) týkající se zárodečných fluktuací z konce *Velkého třesku*, které jsou jakýmsi *baryonovými* akustickými oscilacemi a časem se zvětšily do makroskopických struktur, se nachází v zelené oblasti. Všechny tyto tři oblasti se protínají v jediné, která odpovídá přibližně 68 procentům *temné energie* a 32 procentům hmoty (atomární a *temné*).

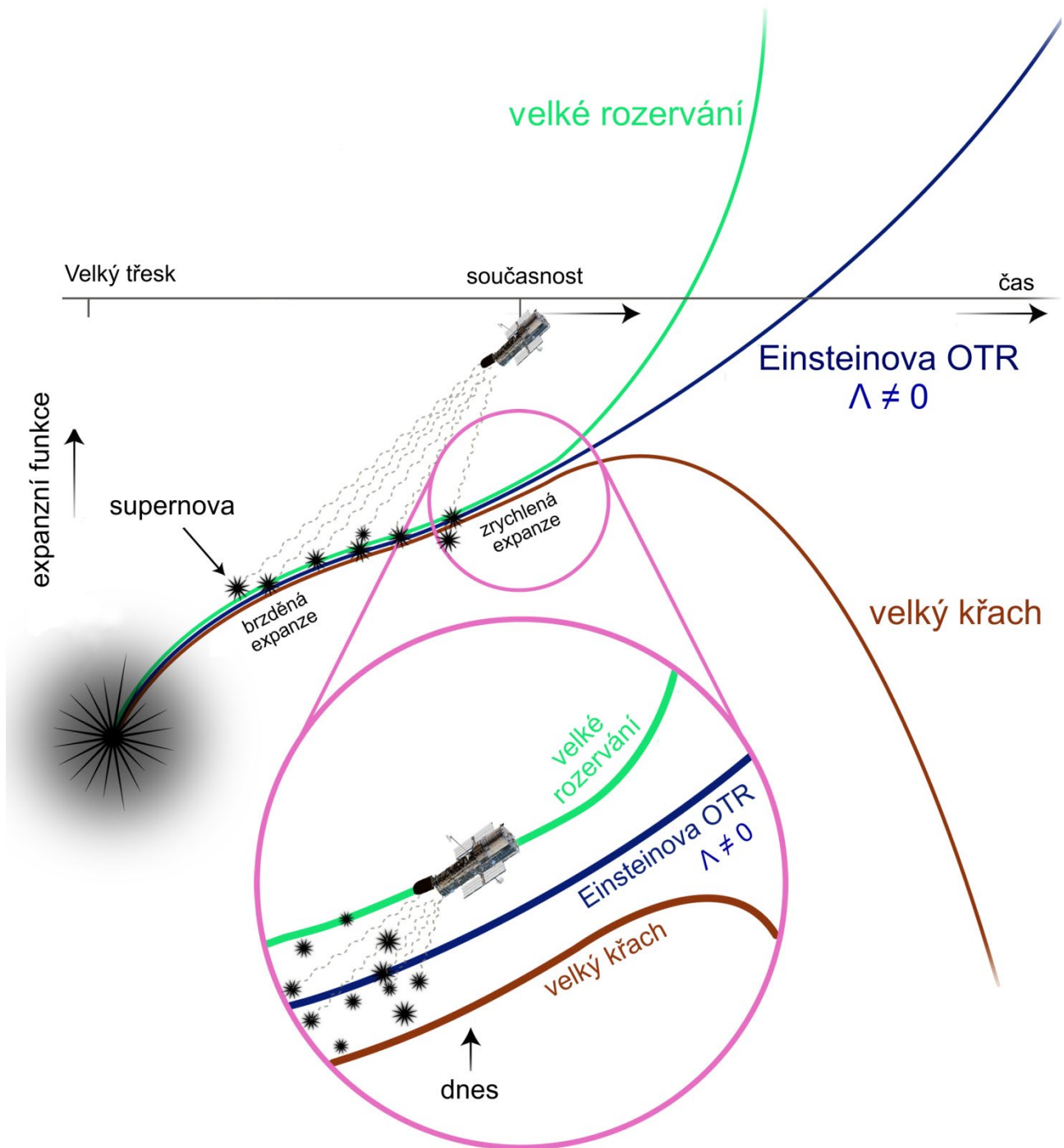
V dalším diagramu je na vodorovné ose opět *omega parametr* Ω_m týkající se poměrného zastoupení hmoty, na svislé ose je *w parametr*, což je koeficient úměrnosti mezi tlakem p a hustotou energie u (41):



Jak víme, z předchozího textu, když je w parametr roven -1 , odpovídá to fluktuacím vakua. Na diagramu je patrná oblast průniku všech tří studií někde kolem hodnoty $w = -1$, což by ukazovalo na příčinu zrychlené expanze. Nicméně nepřesnost je ještě značná a bude to chtít další experimenty, abychom se dověděli, zda *fluktuace vakua* skutečně mohou za zrychlenou expanzi vesmíru.

8.3.14 Osud vesmíru

Dnes víme, že vesmír expanduje zrychlenou expanzí. Nevíme, co bylo na počátku, protože naše znalosti sahají zatím pouze do času 10^{-13} sekundy. Co bylo předtím, jsou zatím jenom fantazie. Přesto máme jisté možnosti, jak korigovat naše představy, například pomocí detekce a analýzy *reliktních gravitačních vln* nebo *reliktních neutrin*. Co se týče budoucnosti, pokud by platily Fridmanovy modely, pak se vesmír při hustotě $\rho > \rho_c$ začne hroutit, nebo při $\rho < \rho_c$ bude expandovat. Fridmanovy modely ovšem nepočítají s *temnou energií* a se zrychlenou expanzí. Dokud nebudeme vědět, co způsobuje zrychlenou expanzi (jestli jsou to *fluktuace vakua* nebo něco jiného), do té doby nikdo nemůže zodpovědně předpovědět, jak to bude dál. Zatím platí všechny možnosti. Buď bude vesmír expandovat až do *velkého rozervání*, nebo bude expandovat umírněně, nebo bude po čase kolabovat:



Pokud by nastala první varianta, kdy se rozměry exponenciálně zvětšují, po čase bychom zde měli nadsvětelnou expanzi. Výsledkem by bylo, že *horizont*, který vidíme, se začne zmenšovat. Jinými slovy, pokud by se prostor „nafukoval“ vyšší rychlostí, než k nám stíhá doletět světlo z dané oblasti, pak po čase dojde například k tomu, že k nám nedoletí světlo ani od okolních planet a nakonec i ze Slunce a obzor se uzavře. Každopádně máme dostatek času to zkoumat.

9. DODATKY

9.1 Gravitace jako statistický projev mikrosvěta

9.1.1 Beckensteinova teplota

O *černých dírách* a jejich vlastnostech uvažoval také izraelský teoretický fyzik Jacob Beckenstein (1947 - 2015). V roce 1973 provedl zajímavý myšlenkový experiment, při kterém si uvědomil, že z *černé díry* lze vyrobit tepelný stroj fungující periodicky, na který jsou aplikovatelné zákony termodynamiky. Z termodynamiky jsou známé periodické stroje, kde se uplatňují dvě teplotní prostřední - ohříváč a chladič. V případě *černé díry* funkci ohříváče můžou plnit *fotony*, které mají nějakou energii a funkci chladiče povrch *černé díry*, kterému je přiřazena určitá teplota. Jak víme, u tepelných strojů platí *Carnotova věta* o účinnosti:

$$\eta \sim \begin{cases} 1 - \frac{T_0}{T} \\ 1 - \frac{\lambda}{R_g} \end{cases} \Rightarrow \lambda = R_g \frac{T_0}{T} ; \quad k_B T \sim h\nu = h \frac{c}{\lambda}$$

Kde T_0 je teplota chladiče a T je teplota kotle. Jak můžeme snadno vidět, pokud bude teplota chladiče T_0 a kotle T stejná, účinnost η bude nulová. Čím větší bude rozdíl teplot kotle T a chladiče T_0 , tím vyšší účinnost η . Beckenstein si uvědomil, že v případě *fotonů* záleží na vzájemném poměru jejich vlnové délky λ a rozměru *černé díry* R_g . Jestliže bude vlnová délka *fotonů* λ srovnatelná se *Schwarzschildovým poloměrem* R_g , pak bude účinnost η nulová a nic to dělat nebude. V případě že vlnová délka λ bude co nejkratší, účinnost η bude maximální. Čili nahradil podíl teplot T_0/T podílem vlnové délky světla λ a gravitačního poloměru *černé díry* R_g . Dále dal do úměrnosti tepelné množství $k_B T$ a energii fotonu $h\nu$. Porovnáním Carnotova vztahu pro účinnost η a rovnost energií dostal teplotu T_0 , kterou přiřadil povrchu *černé díry*:

$$\lambda = R_g \frac{T_0}{T} \Rightarrow T_0 = \frac{\lambda T}{R_g} \sim \frac{\lambda h c}{\lambda k_B R_g} = \frac{h c}{k_B R_g}$$

$$T_0 \sim \frac{h c}{k_B R_g} \tag{60}$$

Tato konstrukce je dosti divoká a jednoduše napadnutelná, což byl důvod, proč Stephen Hawking (1942 - 2018) to celé přepočítal na základě kvantové teorie pole a dal tomu v roce 1975 poctivý fyzikální rámec. Kupodivu mu vyšel stejný výsledek jako Beckensteinovi. Tomuto efektu se dnes říká *Hawkingovo vypařování*.

Jeden pohled na tento mechanismus je takový, že ve vakuu vznikají páry *částic* a *antičástic* (*fluktuace vakua*). Na rozhraní *černé díry* může jeden člen z páru (*částice* nebo *antičástice*) skončit v *černé díře* a druhý člen se vynoří venku. Protože se jedná o virtuální částice, neplatí pro ně zákon zachování energie a hybnosti, takže pokud u vynořivší se částice změříme kladnou energii (hmotnost), druhá, která skončí v *černé díře*, ji má zápornou. Výsledkem je, že hmotnost *černé díry* bude klesat. Částice, které se vynoří, jsou statisticky z poloviny *částicemi* a z poloviny *antičásticemi*. Výsledkem jsou anihilace, čemuž se říká *Hawkingovo vyzařování*. Hawking ukázal, že unikající *fotony* z blízkosti *černé díry* splňují *Planckův vyzařovací zákon* právě s *Beckensteinovou teplotou* přiřazenou povrchu.

Další lidé, kteří to počítali, ukázali, že stejný vztah dostaneme, i když nebudeme uvažovat o vzniku párů *částice-antičástice*, ale o takzvaném tunelování částice z nitra *černé díry* prostřednictvím *tunelového jevu*. Dá se tedy na tento problém dívat z různých úhlů pohledu. Výsledek je stejný.

9.1.2 Teplota, entropie a obecná relativita

V roce 1975 se tedy potvrdila souvislost mezi termodynamikou a gravitací. Otázkou je, pokud můžeme přiřadit povrchu *černé díry* teplotu, můžeme ji také přiřadit *entropii*? Představme si oblast prostoru, která ještě není *černou dírou*. Jakou může mít tato oblast maximální *entropii*? Budeme do ní házet jakoukoli hmotu tak dlouho, než nám hmota zkolabuje v *černou díru* o poloměru R_g , který je totožný s poloměrem určené oblasti. Oblast tedy může mít maximální entropii danou velikostí *černé díry*, která se do ní vejde. Další otázkou je, zda nám po kolapsu hmoty v *černou díru* zmizela také *entropie*, protože termodynamika nám říká, že *entropie* by měla růst; věci se dějí tak, že *chaos* roste. Jinými slovy, *entropie* nám rostla až do vzniku *černé díry*, kdy se to celé uzavřelo a *entropie* jakoby zmizela. Řešení je takové, že pokud můžu přiřadit povrchu *černé díry* teplotu, můžu mu také přiřadit *entropii* ve formě fluktuací povrchu. Povrch tedy není nikdy hladký. Ve fluktuacích je lokalizovaná *entropie* a informace o všem, co je uvnitř. *Entropie* je tedy v tomto případě úměrná povrchu nikoliv objemu, což je zvláštní, protože *entropie* je aditivní veličina a roste s počtem částic v objemu.

Princip maxima entropie, že v dané oblasti (vymezeném objemu) prostoru existuje maximální *entropie* taková, která je rovna *entropii* největší *černé díry*, která se do ní vejde, evokuje skutečnost, že částice nemohou být dělitelné donekonečna, protože každé další dělení by znamenalo nárůst *entropie*. Takže existuje nějaká finální mez, za kterou již svět není dále dělitelný.

V roce 1995 Ted Jacobson (*1954) poukázal na tuto vazbu termodynamiky a gravitace. Ukázal, že pokud přiřadíme povrchu *černé díry* nejen teplotu, ale i *entropii*, dokáže z toho odvodit rovnice obecné relativity. Jedná se o alternativní odvození stejné sady rovnic, takže z praktického hlediska to nepřináší nic nového. Stále se jedná o jednu teorii odvozenou dvěma způsoby dávající stejné předpovědi. Není tedy co experimentálně rozlišovat. Nicméně přesto je to velmi zajímavé.

9.1.3 Verlindeho gravitace

V roce 2009 byl teoretický fyzik Erik Verlinde (*1962) na dovolené ve Francii a kvůli krádeži kufrů tam musel zůstat o něco déle. Dodatečný čas využil k tomu, aby věci, které promýšlel již řadu let, dotáhnul do nějakého smysluplného celku, který pak v roce 2010 publikoval v archivu Cornellovy univerzity mimo hlavní proud. Celá Verlindeho hypotéza je od roku 2016 založena na třech základních principech:

- (1) Princip entropické síly – gravitace je entropickou silou (2010)
- (2) Holografický princip - zdrojem entropie jsou holografické projekční plochy (2010)
- (3) Princip fluktuací vakua – zdrojem entropie jsou také mikroskopické fluktuace (2016)

První dva principy, které uvedl v roce 2010, dělají tuto hypotézu prakticky neodlišitelnou od obecné relativity, protože dává stejné výsledky, jako Jacobsonova teorie. Zajímavá je ovšem v tom smyslu, že se pokouší poprvé vysvětlit, co to je gravitace. Jakmile v roce 2016 přidal třetí princip ohledně *fluktuací vakua*, začala dávat jiné výsledky, než obecná relativita, čímž se stává experimentálně rozlišitelnou.

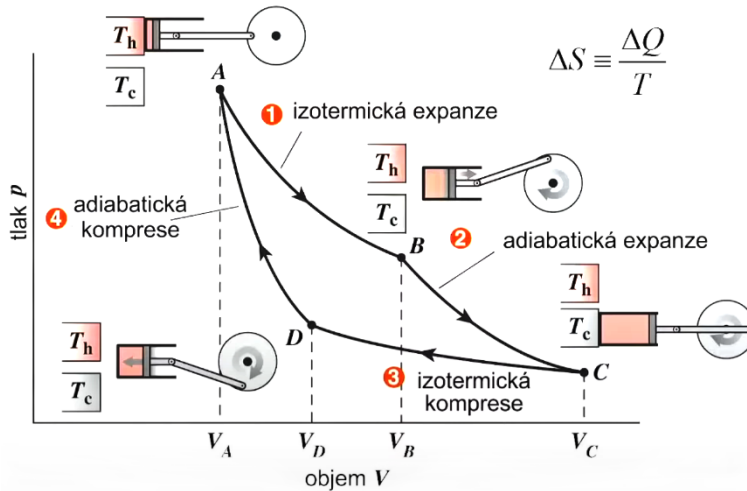
9.1.3.1 Princip entropické síly: Gravitace je entropickou silou

Definice pojmů: *Adiabatický děj* je termodynamický děj, při kterém nedochází k tepelné výměně mezi soustavou a okolím. *Izotermický děj* je termodynamický děj, při kterém se nemění teplota termodynamické soustavy.

Co to je *entropie*? Představme si uzavřenou litrovou láhev A , ve které je vzduch. Úkolem je ohřát jej z 20 na 40 stupňů. Láhev začneme ohřívat, čímž roste uvnitř láhve tlak. Po dosažení cílové teploty je celkové dodané teplo ΔQ_A . To stejné provedeme s jinou litrovou láhví B , ale místo pevného uzávěru bude uzavřena nafukovacím balónkem. Při ohřevu, se balónek nafoukne, takže je navíc vykonaná mechanická práce, ale za přibližně konstantního tlaku. Dodané teplo je ΔQ_B . Teplota plynu v obou láhvích se tedy zvýšila o stejnou hodnotu 20 stupňů, ale dodaná tepelná energie je různá kvůli mechanické práci vykonané nafouknutím balónku:

$$\Delta T_B = \Delta T_A \quad , \quad \Delta Q_B > \Delta Q_A$$

Teplu je tedy neúplný diferenciál; integrace po různých cestách dává různé výsledky. Je zde ovšem jedno řešení, na které přišel Nicolas Léonard Sadi Carnot (1796 - 1832), francouzský fyzik a zakladatel termodynamiky, se svým legendárním cyklem, který je složený ze dvou *izotermických* a dvou *adiabatických* dějů. Jedná se o cyklický tepelný stroj:



Snadno nahlédneme, že teplo ΔQ je různé po různých cestách, ale pokud jej vydělíme termodynamickou teplotou T , pak dostaneme veličinu ΔS , která dává u obou experimentů stejnou hodnotu, což znamená, že se nemění. Tato veličina se nazývá *entropie*:

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T} \quad (61)$$

Změna *entropie* je změna tepelného obsahu vztažená k teplotě, při které děj probíhá. Nezávisí už na způsobu, jak děj probíhá. Z hlediska termodynamiky je *entropie* pouze opraveným tepelným obsahem. Samotné teplo má problém, protože po různých cestách (způsobech) je různé, ale pokud jej vydělíme absolutní teplotou, tyto problémy zmizí. Jednotkou *entropie* je tedy $J \cdot K^{-1}$.

Z hlediska statistické fyziky má *entropie* význam počtu realizací systému a souvisí s jeho chaosem. V uzavřeném systému může *entropie* pouze růst. Pokud *entropie* roste, roste chaos nebo také počet realizací stavu systému. Po dosažení maxima *entropie* se systém nachází v termodynamické rovnováze. *Entropie* (chaos) pak již dále neroste. V tomto stavu už neexistují žádné makroskopické toky. Termodynamická rovnováha je tedy stav relativního klidu, do kterého látka míří.

Zajímavý je vztah mezi *entropií* a informací. Existuje takzvaný *princip maxima informace*. Věříme, že informace je vázána na hmotu, protože si těžko představíme informaci bez jakéhokoliv hmotného nosiče. Pokud bychom například chtěli dostat maximum informací do konečného objemu, v jistém okamžiku se nám to zhroutí v *černou díru* s poloměrem R_g a informace o tom, co je uvnitř, by pak byla na *horizontu*. A pokud je tedy informace vázána na hmotu, pak v konečném objemu může být pouze konečné množství informací, nikoli nekonečné. Jestliže tento princip platí, pak z toho plyne, že elementární částice nejsou dělitelné donekonečna. To znamená, že existuje hranice, za kterou již nic není.

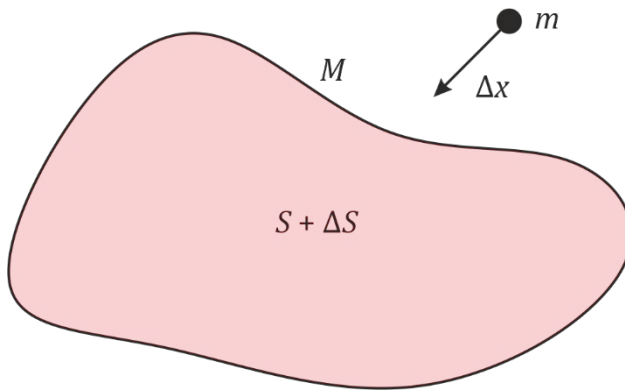
Co to je *entropická síla*? V podstatě se jedná o statistické chování mikročástic pohybující se chaoticky v určité oblasti a difundující dále do okolí. Odborně se tomu říká *gradient koncentrace*, který je tou hybnou silou způsobující rozšiřování do okolí. Jedná se tedy o termodynamickou sílu vytvořenou *gradientem* nějaké veličiny. Jako příklad uveďme difúzi, osmózu, tepelný tok, elasticitu a podobně. To znamená, že kdekoli se objeví *gradient entropie*, vzniká fiktivní síla, která žene objekty v preferovaném směru. Změna *entropie* tedy vede na vznik *gradientní síly*. Jak víme, teplo je energie udávaná v joulech podobně jako mechanická práce. Takže můžeme psát:

$$\Delta Q \sim \Delta A$$

$$T \cdot \Delta S \sim F \cdot \Delta x \Rightarrow F \sim T \cdot \frac{\Delta S}{\Delta x}$$

$$\mathbf{F} = T \cdot \nabla S \quad (62)$$

Síla je teplota krát změna *entropie* s polohou, což ve třech dimenzích dává teplotu krát *gradient entropie*.



Máme-li objekt o hmotnosti m a přiblížím-li jej k nějakému jinému objektu o hmotnosti M s entropií S , změní se rozložení částic soustavy, čímž se změní *entropie* o ΔS . Změna *entropie* znamená vznik *gradientu entropie*, čímž vzniká *entropická síla* působící na obě tělesa. Verlinde tuto *entropickou sílu* ztotožnil s gravitací. Zdá se, že chaos mikrosvětla projevující se navenek je to, co považujeme za gravitaci. Gravitace tedy nemusí být samostatnou silou (interakcí), ale soubor *elektromagnetické, silné* a *slabé* interakce, které se projevují navenek jako gravitace. Může se jednat o statistické působení elementárních interakcí mikrosvětla.

První Verlindeho postulát: Gravitace je *entropickou silou*.

9.1.3.2 Holografický princip: Zdrojem entropie jsou holografické projekční plochy

Hologram je plošný záznam nejenom intenzity odraženého světla od objektu, ale i fázového posuvu, kdežto klasická fotografie zaznamenává pouze intenzitu. Fázové posunutí, které je modulované zaznamenávaným objektem, dává výsledný interferenční obrazec. Hologram je tedy dvourozměrný záznam třírozměrného objektu. Dá se to aplikovat obecně i na více dimenzí, kdy n dimenzionální svět můžeme zakódovat do $(n - k)$ dimenzí.

Pokud se hmota ztrácí v *černé díře*, mizí evidentně informace, což je divné, protože informace by neměla mizet. Přiřadíme-li povrchu *černé díry* *Hawkingovu-Beckensteinovu teplotu*, můžeme mu přiřadit také *entropii*. Pak se ovšem informace o tom, co je uvnitř nachází na povrchu, což připomíná hologram. Neboli *entropie* na povrchu *černé díry* nese informaci o tom, co je uvnitř. Mechanismus je takový, že jakákoliv částice, která je pohlcena *černou dírou*, nepatrně zvlní její povrch, což představuje informaci. Povrch *černé díry* tedy slouží jako holografická projekční plocha a nese informaci o tom, co je uvnitř. Zajímavé je, že z hlediska termodynamiky je *entropie* opravené teplo, a teplo je objemovou záležitostí, protože je vázáno na objem. *Entropie* je tedy také objemovou záležitostí. Ovšem zde poprvé máme *entropii* vázanou na povrch, což připomíná *holografický princip*, který říká, že veškerá informace o tom, co je uvnitř, se nachází na povrchu. Informace se tedy neztratí.

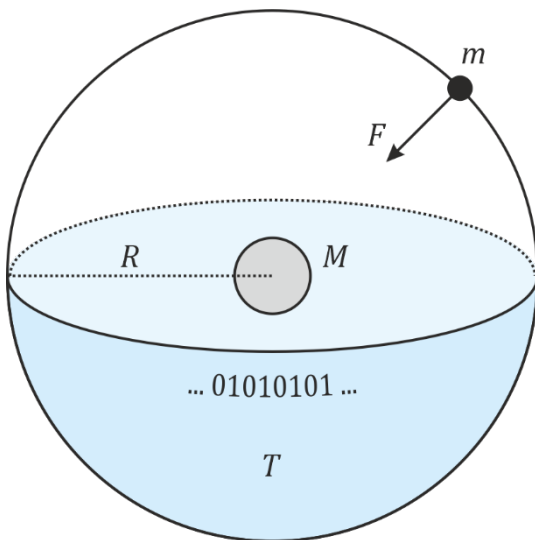
Následně někoho napadlo aplikovat *holografický princip* na celý vesmír. To znamená, jestli naše čtyřrozměrná realita není vybudována vzdáleným holografickým „plátnem“. Otázkou pak bylo, kde se „plátno“ nachází. *Horizont vesmíru* to není, poněvadž se mění a s časem posouvá. Co kdybychom namísto hledání ve velkorozměrové struktuře vesmíru, hledali v mikrosvětě. Co když jsou holografickým plátnem samotné elementární částice? Pokud máme skutečně elementární, dále

nedělitelnou, částici a platí *princip maxima informace (entropie)* v konečném objemu, pak „uvnitř“ této částice už nic není. Pokud by tam něco bylo, pak je tato informace dále dělitelná. A pokud tam nic není, pak veškerá informace je na jejím povrchu a jsme zpět u *holografického principu*.

Existují teorie, jako je například *smyčková gravitace*, které předpokládají, že samotný prostor není dělitelný donekonečna. To znamená, že prostor je složen ze základních elementů. Pokud existují základní elementy prostoru, pak v tomto elementu už nic víc není a informace o „vnitřku“ je na povrchu. Tyto teorie vůbec nepracují s časem. Pracují pouze s prostorem. Čas se tam vynoří emergentně; skutečnost, jak částice difundují mezi elementy prostoru s určitou pravděpodobností svého výskytu, dává směr toku času. Je to podobné jako s *gradientem entropie*. *Entropická síla* posouvá věci preferovaným směrem, a to je to, čemu říkáme čas. Smyčková gravitace tedy nemá v sobě zabudovaný čas nativně, ale vynoří se, jak částice difundují mezi jednotlivými prostorovými elementy.

Druhý Verlindeho postulát: V mikrosvětě platí *holografický princip*, zdrojem *entropie* jsou holografické projekční plochy.

Verlinde ve své práci ovšem nespécifikoval, co je tou projekční plochou, protože to nikdo neví jistě. Můžou tím být světoplochy strun, plochy elementů prostoru, plochy elementárních částic nebo cokoli jiného. Nicméně jednoduše ukázal, že pokud bude *holografická plocha* uzavřená, vynoří se z ní gravitační zákon. Informace je zakódována na uzavřené projekční ploše, která představuje hmotný nosič. Tomu odpovídá nějaká *entropie*. Mějme tedy nějakou uzavřenou *holografickou projekční plochu* (povrch koule), na které je zakódováno vše, co je uvnitř:



Nachází se tam například nějaké těleso o hmotnosti M , které je holografickou projekcí vzdálené od povrchu plochy koule o poloměr R . Hologramem je tedy povrch koule, který má nějakou teplotu T *absolutně černého tělesa*. Necht' máme poblíž této koule malé těleso o hmotnosti m , které změní svou polohu o Δx , a tím i *entropii* o ΔS . Pak můžeme psát vztah pro *entropickou sílu* F :

$$\Delta Q = T\Delta S = F\Delta x \Rightarrow F = T \frac{\Delta S}{\Delta x}$$

Neboli tepelný obsah je roven vykonané práci; síla je úměrná změně *entropie*. Druhý vztah se týká *holografické projekční plochy*, na které je informace o všem, co je uvnitř. Látka (těleso) uvnitř plochy má energii danou výrazem $E = Mc^2$. Protože *projekční ploše* přísluší určitá teplota T , můžeme energii E rovněž napsat jiným výrazem z termodynamické stavové rovnice (*ekvipartiční teorém*) jako počet nosičů informace N krát základní tepelné kvantum $k_B T/2$:

$$E = Mc^2 = N \frac{k_B T}{2}$$

Kde k_B je Boltzmannova konstanta. Z tohoto prostého vztahu pak plyne, že teplota T je úměrná poměru hmotnosti centrálního tělesa M a počtu nosičů informace N :

$$T \sim \frac{M}{N}$$

Dále platí, že čím větší bude hmotnost malého tělesa s hmotností m a čím větší bude jeho posun Δx , tím větší změnu entropie ΔS vyvolá:

$$\Delta S \sim m\Delta x$$

Počet nosičů informace N je samozřejmě úměrný ploše A . Čím větší je plocha A , tím větší počet nosičů informace N obsahuje:

$$N \sim A \sim R^2$$

Složením těchto několika základních vztahů dostaneme známý gravitační zákon:

$$F = \frac{T\Delta S}{\Delta x} \sim \frac{\frac{M}{N}\Delta S}{\frac{\Delta S}{m}} \sim \frac{\frac{M}{R^2}\Delta S}{\frac{\Delta S}{m}} = \frac{Mm}{R^2}$$

$$F = \text{konst} \cdot \frac{Mm}{R^2} \quad (63)$$

Entropická síla má tedy tvar gravitačního zákona. Newtonův gravitační zákon lze získat touto jednoduchou cestou za předpokladu, že gravitace je entropickou silou a platí holografický princip. Z tohoto pohledu nám stačí pouze 3 interakce (elektromagnetická, silná a slabá) a není nutno uvažovat o gravitační. Erik Verlinde také ukázal, že z toho plynou rovnice obecné relativity. Ovšem v roce 2010 to v zásadě nepřineslo nic nového (dává to stejné výsledky jako předchozí teorie) snad kromě vysvětlení, jak by mohla fungovat gravitace. Bylo to chápáno spíše jako zajímavé alternativní odvození.

9.1.3.3 Princip fluktuací vakua: Zdrojem entropie jsou také mikroskopické fluktuace

Zlom nastal až v roce 2016, kdy si Verlinde uvědomil, že zdroj entropie nemusí být jenom plošný, ale také objemový. Jak víme, v kvantové teorii platí relace neurčitosti:

$$\Delta p \Delta q \geq \frac{\hbar}{2}$$

Což znamená, že nemůžeme nikdy určit současně polohu a hybnost částice, protože existuje základní kvantová mez daná Planckovou konstantou. Pokud změříme přesněji polohu q , méně přesně změříme hybnost p a naopak. I v případě absolutní nuly, kdy by člověk předpokládal, že ustane veškerý pohyb, což by mělo za následek, že známe přesně polohu i hybnost částic, ve skutečnosti existují takzvané nulové kmity těchto částic právě kvůli relacím neurčitosti. Tento vztah platí zcela obecně. Tedy nejen pro částice, ale i pro pole:

$$\Delta \Phi \Delta \pi \geq \frac{\hbar}{2}$$

Hodnota pole a jeho hybnost musí opět splňovat relace neurčitosti. Takže vakuum nemůže být nikdy zcela prázdné, protože pole by pak mělo nulovou hodnotu a jeho hybnost by také byla nulová, a to zákony kvantové mechaniky nedovolují. Vždy budou existovat nějaké fluktuace základních polí. Vakuum tedy můžeme definovat jako stav světa s nejmenším množstvím částic a polí, které nám dovolují zákony kvantové fyziky, konkrétně relace neurčitosti. Vakuum je tedy dynamický systém. Existuje například Casimirův jev, který je přímým projevem vakuových fluktuací. Dalšími příklady jsou

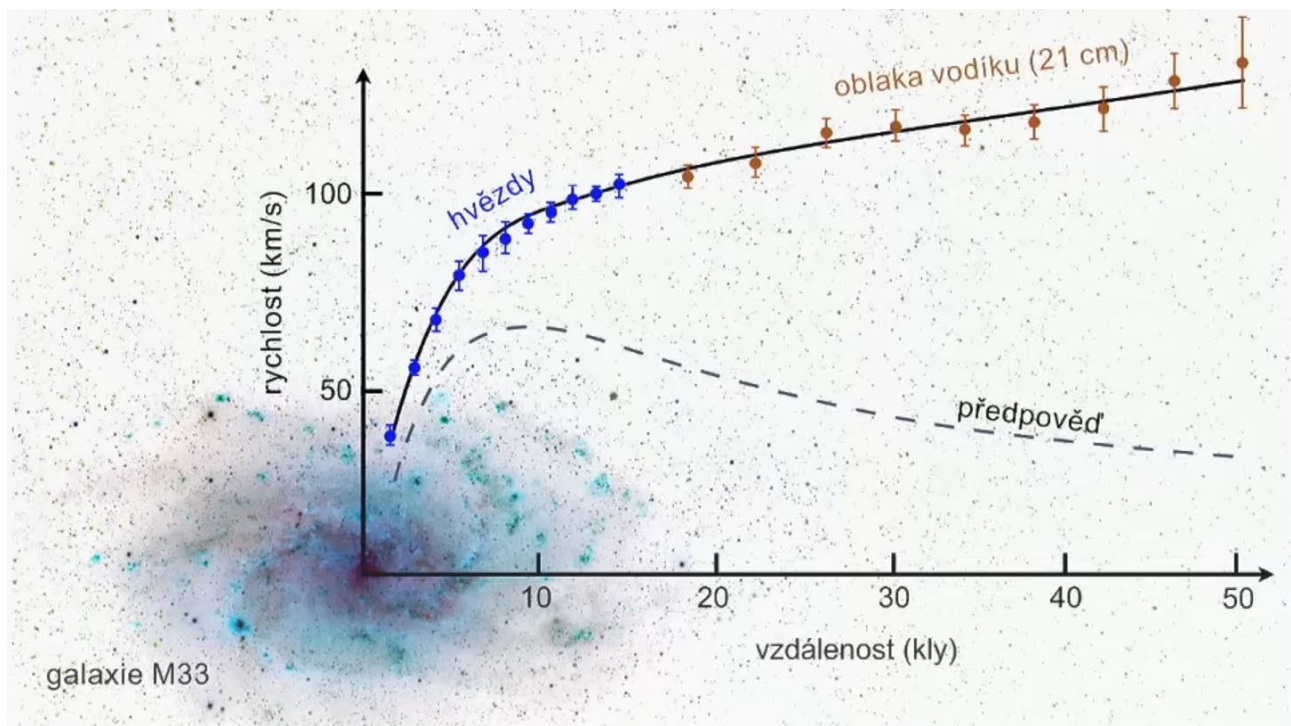
stínění náboje, polarizace vakua nebo *Lambův posuv*. Jestliže tedy existují fluktuace polí, pak také nesou nějakou informaci a mají nějakou *entropii*. *Entropie* by pak měla dvě složky - plošnou (*holografická projekční plocha*) a objemovou (*objemové fluktuace vakua*).

Třetí Verlindeho postulát: Zdrojem *entropie* jsou také mikroskopické fluktuace.

Zavedením tohoto třetího postulátu se předpovědi Verlindeho hypotézy již liší od obecné relativity. V tuto chvíli to může být z experimentálního hlediska zajímavá teorie, protože díky odlišnosti ji můžeme buď vyvrátit, nebo potvrdit.

9.1.3.4 Objemové a plošné zdroje entropie

Jak bylo uvedeno v tomto textu, současné poznatky jsou takové, že vesmír je složen z atomární látky (5 %), *temné hmoty* (27 %) a *temné energie* (68 %). Kolem galaxií se nachází jakési halo z temné hmoty zodpovědné za rotační křivky hvězd. Uvažujme nyní Verlindeovy objemové S_V a plošné S_A zdroje *entropie*. Hodně záleží na jejich podílu. Verlinde ukázal, že pokud máme někde látku, pak tato látka snižuje objemovou složku *entropie*. Například ve Sluneční soustavě, kde je extrémní hustota látky oproti okolnímu vesmíru, je tato objemová složka snižena. Limitně jde podíl objemové a plošné složky k nule ($S_V/S_A \rightarrow 0$). Pak existují hlavně plošné zdroje, což vede na obecnou relativitu. Jakmile ale půjdeme dále mimo Sluneční soustavu, dokonce i mimo naši galaxii, pak díky snížení hustoty látky vzroste objemová složka *entropie* ($S_V/S_A > 0$) a následně se stane výraznou, což má za následek, že Verlindeho teorie se začne lišit od obecné relativity. Ve Sluneční soustavě tedy nepoznáme rozdíl mezi oběma teoriemi, ale pokud budeme na kosmologických vzdálenostech, kde objemová složka má vliv, pak se vynoří další členy, které je nutno zohlednit:



Jak už bylo uvedeno v tomto textu, v 1968 Vera Rubinová měřila rotační křivky galaxií z vodíkových oblaků. Na obrázku je vidět rozdíl mezi předpovězenými hodnotami z Keplerových zákonů nebo z gravitačního zákona a skutečně naměřenými hodnotami. Naměřené hodnoty ukazují dále od centra vyšší rychlosti než bychom předpokládali z rozložení pozorované látky. Jestliže tedy rychlost se vzdálenosti od centra neklesá, jak bychom předpokládali, ale je vyšší, pak by byla tato oblaka vodíku odstředivou silou odvržena pryč. Evidentně tomu tak není. To tedy znamená, že je něco drží, což je zřejmě nějaká další hmota, kterou nevidíme a která vede na ploché rotační křivky vodíkových oblaků a také jednotlivých hvězd.

Zajímavé je, že Verlindeho teorie tuto plochou křivku dává automaticky, protože čím více se vzdalujeme od centra galaxie, tím více se projevují objemové zdroje *entropie*. Pokud je toto pravda, pak by mohla být *temná hmota* a *temná energie* jedno a to samé. Kvantové *fluktuační vakua* by se tedy projevil nejenom na zrychlené expanzi vesmíru jako *temná energie*, ale i jako *temná hmota* v rotačních křivkách, což je nesmírně odvážné tvrzení.

9.1.3.5 Provázanost fluktuací

V kvantové teorii existuje takzvaná provázanost částic na základě společné vlnové funkce. Jak již víme, vesmír má *horizont*, za který nevidíme. Je dán vzdáleností, odkud k nám doletělo elektromagnetické záření za dobu existence vesmíru. Otázkou je, zda kvantová provázanost fluktuací vakua, které měly společný počátek v horkém a hustém vesmíru, funguje pouze na kratší vzdálenost, než je *horizont*, nebo funguje až za *horizont*. Verlinde ukázal, že tyto dva případy jsou experimentálně rozlišitelné. Zrychlená expanze bude mít jiné vlastnosti, platí-li kvantová provázanost za *horizont* a jiné, platí-li kvantová provázanost po *horizont*.