

CASSEGRAIN

OBSAH

1. ÚVOD.....	2
2. PARABOLA V ROVINĚ.....	4
2.1 Definice.....	4
2.2 Základní pojmy	4
2.3 Vlastnosti.....	4
2.4 Vrcholová rovnice paraboly	4
2.4.1 Osa je svislá (rovnoběžná s osou y) a omezená zdola.....	4
3. HYPERBOLA V ROVINĚ.....	8
3.1 Definice.....	8
3.2 Základní pojmy	8
3.3 Vlastnosti.....	8
3.4 Středová rovnice hyperboly	8
3.4.2 Hlavní osa o_1 je svislá (rovnoběžná s osou y)	8
4. CASSEGRAIN.....	12
4.1 Soustava Cassegrain	12
4.2 Výpočet.....	12
4.2.1 Ohnisko paraboly	13
4.2.2 Parametry hyperboly.....	14
4.2.3 Výpočet tabulkových hodnot paraboly a hyperboly pro výrobu šablon	15
4.2.4 Příklad pro konkrétní zadané hodnoty	16

1. ÚVOD

Laurent Cassegrain (1629 – 1693) byl francouzský katolický kněz, fyzik a vynálezce. O jeho životě není mnoho známo, ale v roce 1654 už byl knězem a profesorem. Zajímala ho akustika, optika a mechanika. Cassegrain zdokonalil *Newtonův zrcadlový dalekohled* tím, že kromě primárního dutého zrcadla použil navíc sekundární vypouklé zrcadlo odrážející paprsky do středového otvoru v primárním zrcadle, za kterým se nacházel okulár. Výhodou této konstrukce je zkrácení délky soustavy anebo prodloužení ohniskové vzdálenosti.

V telekomunikacích (satelitní pozemní stanice, radioteleskopy, komunikační satelity) a radarové technice znamená *Cassegrainova anténa* parabolickou anténu, ve které je přijímací část namontována na nebo za povrch *konkávního* hlavního (*primárního*) parabolického reflektoru a je směřována na menší *konvexní* sekundární reflektor zavěšený mezi tímto *primárním* reflektorem a jeho ohniskem. Svazek rádiových vln dopadá na *primární* reflektor, od něhož je odražen k *sekundárnímu*, který jej odráží zpět směrem ke středu *primárního* reflektoru. Konstrukce *Cassegrain* je široce používána v parabolických systémech, zejména ve velkých anténách, jako jsou satelitní pozemní stanice, radioteleskopy a komunikační satelity.

Primární reflektor má tvar paraboloidu, zatímco *konvexní sekundární* reflektor je hyperboloid. Geometrickou podmínkou pro *kolimovaný* svazek rovinné vlny je, že přijímač je umístěn ve *vzdáleném* ohnisku hyperboloidu, zatímco ohnisko *primárního* paraboloidu je totožné s *blízkým* ohniskem hyperboloidu. Obvykle jsou *sekundární* reflektor a přijímač umístěny na centrální ose paraboly.

Tato konstrukce je alternativou k nejběžnějšímu designu parabolické antény, ve kterém je samotný vstupní díl přijímače namontován v jejím ohnisku a orientován zpět směrem k paraboloidu. *Cassegrain* je sice složitější konstrukce, ale v určitých aplikacích má oproti klasické parabolické anténě výhody, které mohou zvýšenou složitost ospravedlnit:

- Přijímací část a související vlnovody se vstupní elektronikou mohou být umístěny na nebo za *primární* parabolou namísto zavěšení v ohnisku paraboloidu, kde blokují část paprsku. Proto se tato konstrukce používá pro antény s objemným nebo komplikovaným napájením, jako jsou pozemní antény pro satelitní komunikaci, radioteleskopy a antény na některých komunikačních satelitech.
- Protože přijímací část se souvisejícími vlnovody je směřována spíše vzhůru, nikoli dolů k parabole a zemi, postranní část svazku mimo *sekundární* reflektor přichází spíše z chladné oblohy než z teplé země. U přijímacích antén to snižuje příjem zemního šumu, což má za následek nižší celkový tepelný šum antény.
- Další výhodou je *duální tvarování reflektoru*. Přítomnost druhé odrazné plochy v cestě signálu umožňuje další možnosti přizpůsobení vyzařovacího diagramu pro maximální výkon. Například zisk běžných parabolických antén je snížen, protože citlivost přijímací části klesá směrem k vnějším částem paraboloidu. Při „tvarování duálního reflektoru“ je tvar *sekundárního* reflektoru změněn tak, aby směřoval větší výkon signálu do vnějších oblastí paraboly, což má za následek rovnoměrnější „osvětlení“ *primárního* prvku z důvodu maximalizace zisku. To však vede k deformaci *sekundární* plochy, která pak již není přesně hyperbolická. Přestože je deformace nepatrná, vlastnost konstantní fáze je ztracena. Tato fázová chyba však může být kompenzována mírným doladěním tvaru *primárního* zrcadla.
- Zvětšení ohniskové vzdálenosti antény znamená zmenšení bočních laloků. Parabolické reflektory používané v parabolických anténách mají velké zakřivení a krátkou ohniskovou vzdálenost. Ohnisko je umístěno blízko parabolické plochy, aby se zkrátila délka podpěr potřebných k držení přijímací vstupní části nebo *sekundárního* reflektoru. Poměr ohniskové vzdálenosti k průměru paraboly neboli *ohniskový poměr* u typických parabolických antén je $f = 0,25$ až $0,8$ ve srovnání s parabolickými zrcadly používaných v optických systémech, kde je $f = 3$ až 8 . V anténě, kde je přijímací část umístěna v ohnisku paraboloidu, by „plošší“ parabolická plocha s relativně dlouhou

ohniskovou vzdáleností vyžadovala neprakticky propracovanou nosnou konstrukci, která by spolehlivě udržela vstupní přijímací díl pevně vzhledem k parabole. Nevýhodou malého *ohniskového poměru* je však skutečnost, že anténa je citlivá na malé odchylky od ohniska, protože úhlová šířka, kterou může účinně zaostřit, je malá.

- Delší ohnisková vzdálenost také zlepšuje diskriminaci *křížové polarizace* mimoosých zdrojů, což je důležité u satelitních antén, které používají k přenosu samostatných informačních kanálů dva ortogonální polarizační režimy.

Úhlová šířka sekundárního reflektoru je typicky 10 až 15°, na rozdíl od *úhlové šířky* 120 až 180° v případě, kdy je vstupní část umístěná v ohnisku *primárního* reflektoru paraboloidu.

2. PARABOLA V ROVINĚ

2.1 Definice

Parabola p je množina všech bodů P v rovině, které mají stejnou vzdálenost od daného bodu (ohniska) F a dané přímky (řídící přímky) d neprocházející ohniskem F :

$$|FP| = |D_P P|$$

Kde $|FP|$ je vzdálenost bodu paraboly od ohniska a $|D_P P|$ je vzdálenost stejného bodu od řídící přímky d . Je tedy definovaná jedním ohniskem F a jednou přímkou d . Lze ji také definovat jako kuželosečku s výstředností neboli *numerickou excentricitou* ε rovnou jedné.

2.2 Základní pojmy

- Bod F se nazývá ohnisko paraboly.
- Přímka d se nazývá řídící přímka paraboly.
- Přímka procházející bodem D_V a ohniskem F se nazývá osa paraboly a je kolmá k řídící přímce.
- Bod V se nazývá vrchol paraboly a nachází se ve středu úsečky FD_V .
- Délku úsečky FD_V nazýváme parametrem paraboly p , což je vzdálenost ohniska F od řídící přímky d .
- Říkáme, že parabola je v normální poloze, je-li její osa rovnoběžná s osou x nebo y .

Parabolu lze také chápat jako limitu posloupnosti elips, ve které je jedno ohnisko pevné a druhé se postupně vzdaluje do nekonečna.

2.3 Vlastnosti

- Parabola je osově souměrná. Osa souměrnosti prochází ohniskem F a je kolmá na řídící přímku d .
- Otáčením paraboly kolem její osy souměrnosti vznikne kvadratická rotační plocha, zvaná rotační paraboloid.

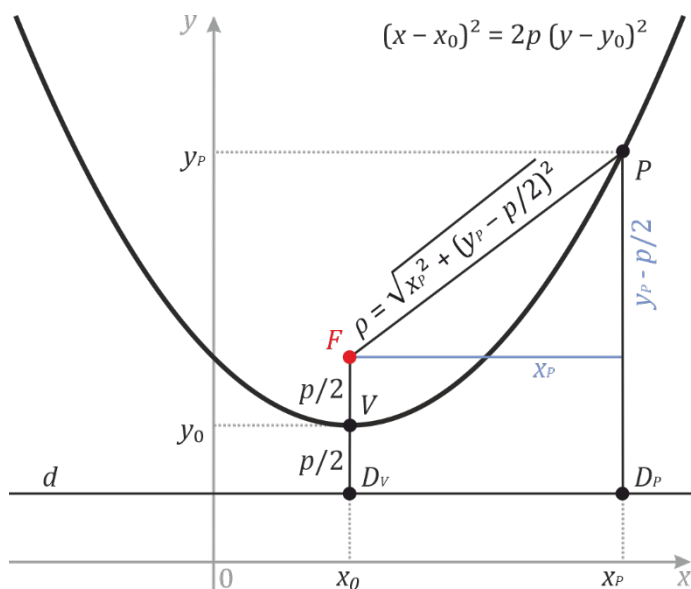
2.4 Vrcholová rovnice paraboly

Rozlišujeme celkem čtyři různé případy ohledně toho, jak je orientována osa paraboly:

- 2.4.1 Osa je svislá (rovnoběžná s osou y) a omezená zdola ($p > 0$)
- 2.4.2 Osa je svislá (rovnoběžná s osou y) a omezená shora ($p < 0$)
- 2.4.3 Osa je vodorovná (rovnoběžná s osou x) a omezená zleva ($p > 0$)
- 2.4.4 Osa je vodorovná (rovnoběžná s osou x) a omezená zprava ($p < 0$)

V tomto konkrétním případě nás bude zajímat pouze první případ:

- 2.4.1 Osa je svislá (rovnoběžná s osou y) a omezená zdola



Věta

Nechť je dána parabola, kde je její osa rovnoběžná s osou y , vrchol V má souřadnice $[x_0; y_0]$ a je omezená zdola (otevřená shora, konvexní parabola). Pak její rovnice v kanonickém tvaru a souřadnice ohniska jsou:

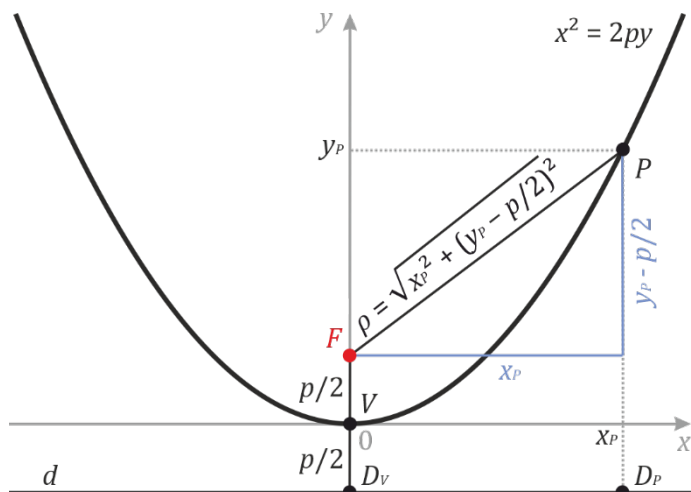
$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0) \quad ; \quad V = [x_0; y_0] \quad , \quad F = [x_0; y_0 + p/2] \quad (1)$$

Pokud $[x_0; y_0] = [0; 0]$, pak můžeme psát:

$$x^2 = 2py \quad ; \quad V = [0; 0] \quad , \quad F = [0; p/2] \quad (2)$$

Důkaz

Odvodíme vrcholovou rovnici paraboly omezené zdola (otevřené shora) s vrcholem V v počátku souřadnicového systému, s osou symetrie y a parametrem p :



Souřadnice bodů V a F jsou tedy:

$$V = [0; 0] \quad , \quad F = \left[0; \frac{p}{2}\right]$$

Řídící přímka d je dána rovnicí:

$$y = -\frac{p}{2}$$

Vzdálenost bodu P od řídící přímky d je:

$$|PD_p| = y + \frac{p}{2}$$

Vzdálenost bodu P od ohniska je:

$$|PF| = \rho = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2}$$

Z definice paraboly víme, že platí:

$$|PD_p| = |PF|$$

$$y + \frac{p}{2} = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2}$$

$$\left(y + \frac{p}{2}\right)^2 = x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2$$

$$y^2 + py + \frac{p^2}{4} = x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4}$$

$$2py = x^2$$

Nahradíme-li v rovnici x výrazem $(x - x_0)$ a y výrazem $(y - y_0)$, dostáváme hledanou rovnici paraboly omezené zdola (otevřené shora) s vrcholem $V = [x_0; y_0]$ v kanonickém tvaru:

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$$

Q. E. D.

Věta

Geometricky je tečna k parabole osou vnitřního úhlu τ obou průvodičů, to znamená, že tečna v bodě dotyku pólí vnitřní úhel τ průvodičů.

Důkaz

Na parabole zvolíme libovolně bod T :

3. HYPERBOLA V ROVINĚ

3.1 Definice

Hyperbola h je rovinná křivka, u které pro každý její bod platí, že absolutní hodnota rozdílu vzdáleností od dvou pevně daných bodů F_1 a F_2 (ohnisek) je vždy stejná:

$$|F_1Q - F_2Q| = |r_1 - r_2| = 2a$$

Lze ji také definovat jako kuželosečku s výstředností neboli *numericou excentricitou* ε větší než jedna.

3.2 Základní pojmy

- Bodům F_1 a F_2 se říká ohniska hyperboly.
- Bod S se nazývá střed hyperboly a nachází se ve středu úsečky F_1F_2 .
- Přímka procházející body F_1 a F_2 se nazývá hlavní osa o_1 hyperboly. Kolmice k této ose v bodě S se nazývá vedlejší osa o_2 hyperboly.
- Průsečíky hyperboly V_1 a V_2 s hlavní osou o_1 se nazývají vrcholy hyperboly.
- Úsečky V_1S a V_2S definují hlavní poloosy hyperboly. Jejich délku značíme a . Úsečky V_1A_1 a V_2A_2 definují vedlejší poloosy hyperboly. Jejich délku značíme b . Vzniknou jako kolmice na hlavní osu z vrcholů V_1 nebo V_2 a v místech, kde protínají s kružnicí se středem S o poloměru e , se nachází jejich koncové body A_1 a A_2 .
- Vzdálenost ohniska od středu se nazývá *excentricita* a značíme ji e . Pro *excentricitu* platí vztah $e = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Přímkám a_1 a a_2 se říká asymptoty. Jsou to dvě přímky, které se kříží v bodě S a procházejí body A_1 a A_2 .

3.3 Vlastnosti

- Hyperbola je osově souměrná. Osa souměrnosti o_1 prochází oběma ohnisky.
- Otáčením hyperboly kolem její osy symetrie vznikne kvadratická rotační plocha, zvaná rotační hyperboloid.
- *Numericá excentricita* hyperboly ε je větší než jedna.

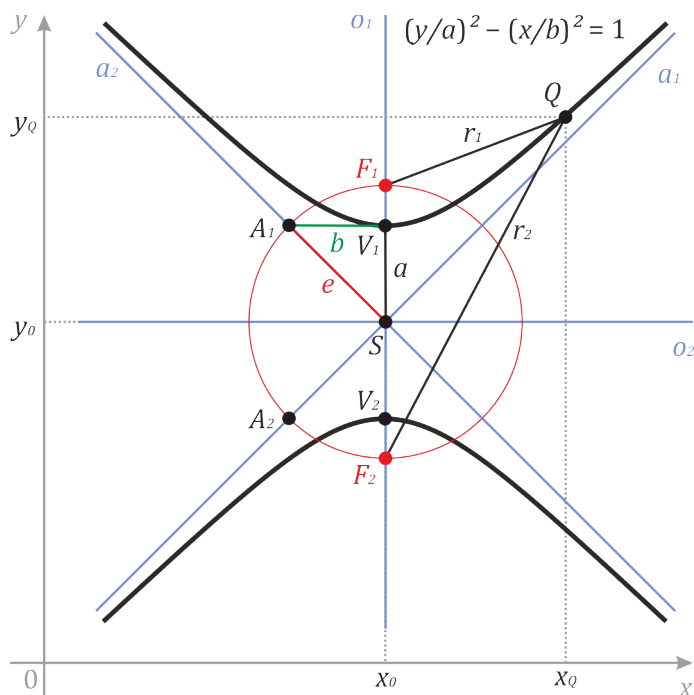
3.4 Středová rovnice hyperboly

Rozlišujeme celkem čtyři různé případy ohledně toho, jak je orientována osa hyperboly a její asymptoty:

- 3.4.1 Hlavní osa o_1 je vodorovná (rovnoběžná s osou x)
- 3.4.2 Hlavní osa o_1 je svislá (rovnoběžná s osou y)
- 3.4.3 Asymptoty a_1, a_2 jsou rovnoběžné s osami x a y (rovnoosá hyperbola)

V tomto konkrétním případě nás bude zajímat pouze druhý případ:

- 3.4.2 Hlavní osa o_1 je svislá (rovnoběžná s osou y)



Věta

Středová rovnice hyperboly v kanonickém tvaru, kde je hlavní osa o_1 rovnoběžná s osou y , je:

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1 \quad ; \quad V = [x_0; y_0 + a] \quad , \quad F = [x_0; y_0 + e] \quad (3)$$

Rovnice asymptot je:

$$y - y_0 = \pm \frac{a}{b}(x - x_0)$$

Pokud $[x_0; y_0] = [0; 0]$, pak můžeme psát:

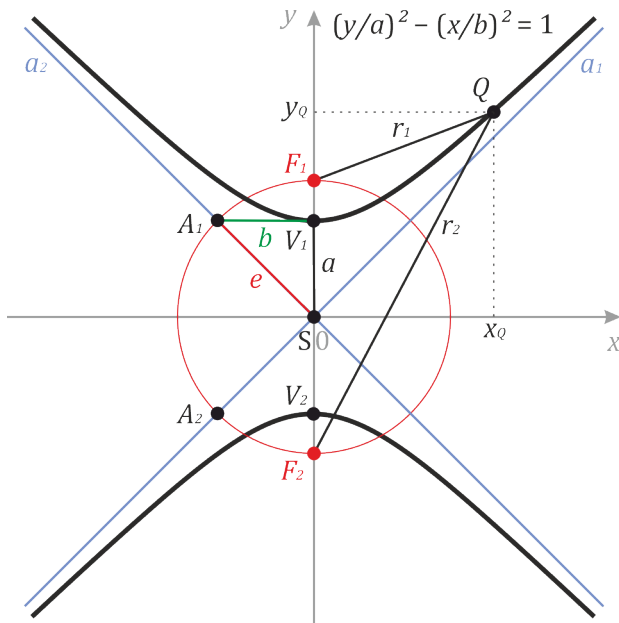
$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad ; \quad V = [0; a] \quad , \quad F = [0; e] \quad (4)$$

Rovnice asymptot je:

$$y = \pm \frac{a}{b}x$$

Důkaz

Odvodíme středovou rovnici hyperboly v kanonickém tvaru, kde je hlavní osa o_1 rovnoběžná s osou y , se středem v počátku souřadnicového systému:



Souřadnice bodů S a F jsou tedy:

$$S = [0; 0]; F = [0; e]$$

Z definice hyperboly víme, že platí:

$$|r_1 - r_2| = 2a$$

$$e^2 = a^2 + b^2$$

Vyjádříme oba průvodiče:

$$r_1^2 = (y - e)^2 + x^2$$

$$r_2^2 = (y + e)^2 + x^2$$

Dosadíme a upravíme:

$$(r_1 - r_2)^2 = 4a^2$$

$$r_1^2 - 2r_1r_2 + r_2^2 = 4a^2$$

$$(y - e)^2 + x^2 - 2\sqrt{(y - e)^2 + x^2}\sqrt{(y + e)^2 + x^2} + (y + e)^2 + x^2 = 4a^2$$

$$y^2 - 2ey + e^2 + x^2 - 2\sqrt{y^2 - 2ey + e^2 + x^2}\sqrt{y^2 + 2ey + e^2 + x^2} + y^2 + 2ey + e^2 + x^2 = 4a^2$$

$$2y^2 + 2e^2 + 2x^2 - 2\sqrt{y^2 - 2ey + e^2 + x^2}\sqrt{y^2 + 2ey + e^2 + x^2} = 4a^2$$

$$y^2 + e^2 + x^2 - \sqrt{y^2 - 2ey + e^2 + x^2}\sqrt{y^2 + 2ey + e^2 + x^2} = 2a^2$$

$$y^2 + e^2 + x^2 - 2a^2 = \sqrt{(y^2 - 2ey + e^2 + x^2)(y^2 + 2ey + e^2 + x^2)}$$

$$(y^2 + e^2 + x^2 - 2a^2)^2 = (y^2 - 2ey + e^2 + x^2)(y^2 + 2ey + e^2 + x^2)$$

$$(y^2 + e^2 + x^2 - 2a^2)(y^2 + e^2 + x^2 - 2a^2) = (y^2 - 2ey + e^2 + x^2)(y^2 + 2ey + e^2 + x^2)$$

$$y^4 + e^2y^2 + x^2y^2 - 2a^2y^2 + e^2y^2 + e^4 + e^2x^2 - 2a^2e^2 + x^2y^2 + e^2x^2 + x^4 - 2a^2x^2$$

$$- 2a^2y^2 - 2a^2e^2 - 2a^2x^2 + 4a^4$$

$$= y^4 + 2ey^3 + e^2y^2 + x^2y^2 - 2ey^3 - 4e^2y^2 - 2e^3y - 2ex^2y + e^2y^2 + 2e^3y + e^4 + e^2x^2 + x^2y^2$$

$$+ 2ex^2y + e^2x^2 + x^4$$

$$-4a^2y^2 - 4a^2x^2 - 4a^2e^2 + 4a^4 = -4e^2y^2$$

$$a^2y^2 + a^2x^2 + a^2e^2 - a^4 = e^2y^2$$

$$a^2y^2 + a^2x^2 + a^2(a^2 + b^2) - a^4 = (a^2 + b^2)y^2$$

$$a^2y^2 + a^2x^2 + a^4 + a^2b^2 - a^4 = a^2y^2 + b^2y^2$$

$$a^2x^2 + a^2b^2 = b^2y^2$$

$$b^2y^2 - a^2x^2 = a^2b^2$$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Nahradíme-li v rovnici x výrazem $(x - x_0)$ a y výrazem $(y - y_0)$, dostáváme středovou rovnici hyperboly v kanonickém tvaru, kde je hlavní osa o_1 rovnoběžná s osou y :

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$$

Směrnice asymptot a_1, a_2 jsou dány limitou první derivace funkce $y = f(x)$ hyperboly pro $x \rightarrow \pm\infty$:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{a^2}{b^2} \cdot (b^2 + x^2) \Rightarrow y = \pm \frac{a}{b} \cdot \sqrt{b^2 + x^2}$$

$$y' = \pm \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{b^2 + x^2}} \cdot 2x = \pm \frac{a}{b} \cdot \sqrt{\frac{x^2}{b^2 + x^2}}$$

$$a_{12}: \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y' = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \pm \frac{a}{b} \cdot \sqrt{\frac{x^2}{b^2 + x^2}} = \pm \frac{a}{b} \cdot \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{\frac{x^2}{b^2 + x^2}} = \pm \frac{a}{b} \cdot \sqrt{1} = \pm \frac{a}{b}$$

Rovnice asymptot je tedy:

$$y = \pm \frac{a}{b} x$$

Nahradíme-li v rovnici x výrazem $x - x_0$ a y výrazem $y - y_0$, dostáváme:

$$y - y_0 = \pm \frac{a}{b} (x - x_0)$$

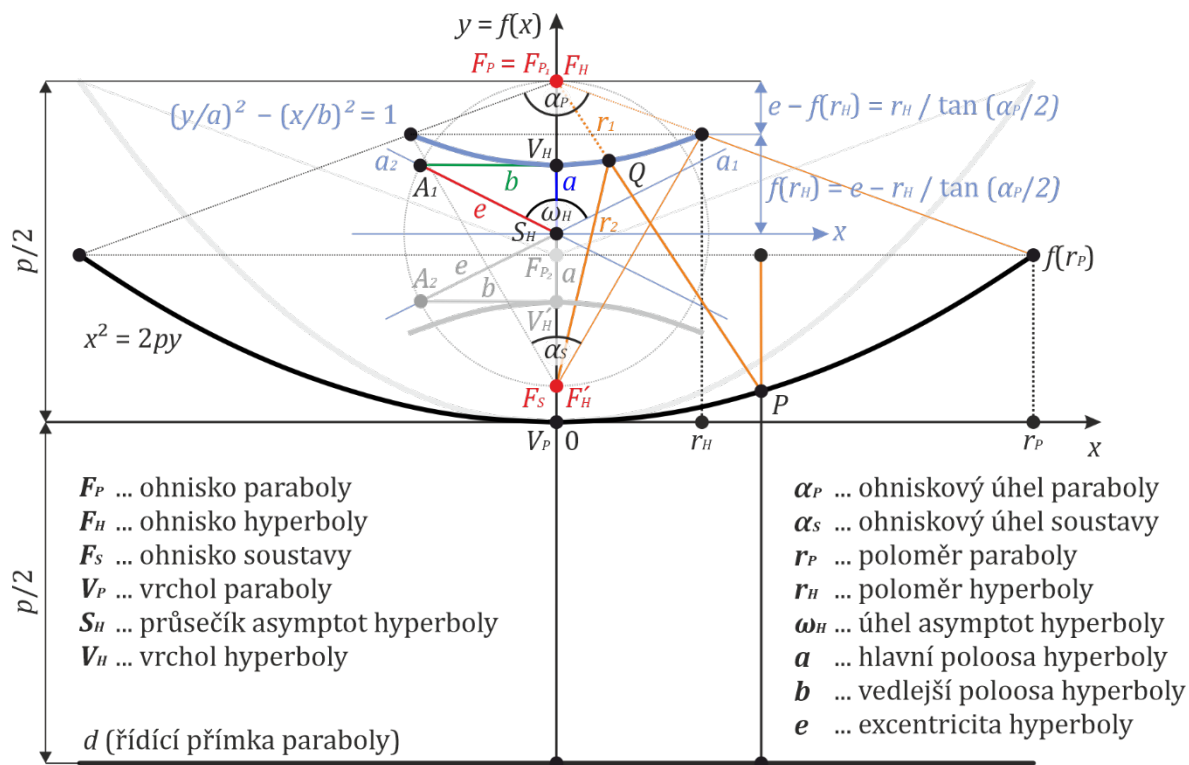
Q. E. D.

Poznamenejme, že tečna v libovolném bodě hyperboly dělí úhel mezi průvodiči r_1 a r_2 na polovinu. Tato vlastnost je důležitá v technických aplikacích, jako jsou například telekomunikace a radioastronomie.

4. CASSEGRAIN

4.1 Soustava Cassegrain

Na obrázku je schéma soustavy Cassegrain s parametry:



Vstupní (zadané) hodnoty:

- Průměr paraboloidu $d_P = 2r_P$
- Průměr hyperboloidu $d_H = 2r_H$
- Ohniskový úhel paraboloidu α_P
- Ohnisko soustavy F_S (je totožné s druhým ohniskem hyperboloidu F'_H)

Výstupní (vypočtené) hodnoty:

- Poloměr paraboly $r_P = d_P/2$
- Ohnisko paraboly F_P (je totožné s prvním ohniskem hyperboly F_H)
- Excentricita hyperboly e
- Průsečík asymptot hyperboly $S_H = F_S + e$
- Poloměr hyperboly $r_H = d_H/2$
- Krajní hodnota hyperboly $f(r_H)$
- Hlavní poloosa hyperboly a
- Vedlejší poloosa hyperboly b
- Vrchol hyperboly $V_H = S_H + a$
- Ohniskový úhel soustavy α_S
- Úhel asymptot hyperboly ω_H
- Ohniskový poměr f
- Souřadnice bodů v rovině $[x, f_P(x)]$ paraboly a $[x, f_H(x)]$ hyperboly pro výrobu šablon

4.2 Výpočet

4.2.1 Ohnisko paraboly

Počátek souřadnicového systému je definován vrcholem paraboly V_P . Z kanonického tvaru rovnice paraboly (2) si vyjádříme $f(x)$:

$$x^2 = 2py \Rightarrow f(x) = y = \frac{1}{2p}x^2 = \frac{1}{4F_P}x^2$$

$$f(x) = \frac{1}{4F_P}x^2$$

Kde $F_P = p/2$ (viz obrázek). Protože máme zadáný průměr paraboloidu d_P a jeho ohniskový úhel α_P , vyjádříme ohniskovou vzdálenost F_P . Poloměr paraboloidu r_P je dán výrazem:

$$r_P = \frac{d_P}{2} \quad (5)$$

Dále platí:

$$\sin \frac{\alpha_P}{2} = \frac{r_P}{F_P + f(r_P)} = \frac{r_P}{F_P + \frac{1}{4F_P}r_P^2} = \frac{4r_P F_P}{4F_P^2 + r_P^2}$$

$$4 \sin \frac{\alpha_P}{2} F_P^2 + r_P^2 \sin \frac{\alpha_P}{2} = 4r_P F_P$$

$$4 \sin \frac{\alpha_P}{2} F_P^2 - 4r_P F_P + r_P^2 \sin \frac{\alpha_P}{2} = 0$$

$$\sin \frac{\alpha_P}{2} F_P^2 - r_P F_P + r_P^2 \sin \frac{\alpha_P}{2} = 0$$

Jedná se o kvadratickou rovnici ve tvaru:

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

Vyjádříme kořeny x_{12} :

$$x_{12} = \frac{-B \pm \sqrt{D}}{2A} \quad ; \quad D = B^2 - 4AC$$

$$x_{12} = \frac{-B \pm \sqrt{D}}{2A} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

V našem případě jsou to F_{P12} :

$$\begin{aligned} F_{P12} &= \frac{r_P \pm \sqrt{(-r_P)^2 - 4 \cdot \sin \frac{\alpha_P}{2} \cdot r_P^2 \sin \frac{\alpha_P}{2}}}{2 \cdot \sin \frac{\alpha_P}{2}} = \frac{r_P \pm \sqrt{(-r_P)^2 - r_P^2 \sin^2 \left(\frac{\alpha_P}{2} \right)}}{2 \cdot \sin \frac{\alpha_P}{2}} \\ &= \frac{r_P \pm \sqrt{(-r_P)^2 \cdot \left[1 - \sin^2 \left(\frac{\alpha_P}{2} \right) \right]}}{2 \cdot \sin \frac{\alpha_P}{2}} = \frac{r_P \pm r_P \cdot \sqrt{1 - \sin^2 \left(\frac{\alpha_P}{2} \right)}}{2 \cdot \sin \frac{\alpha_P}{2}} = \frac{r_P \cdot \left[1 \pm \sqrt{1 - \sin^2 \left(\frac{\alpha_P}{2} \right)} \right]}{2 \cdot \sin \frac{\alpha_P}{2}} \\ &= \frac{r_P \cdot \left[1 \pm \sqrt{\cos^2 \left(\frac{\alpha_P}{2} \right)} \right]}{2 \cdot \sin \frac{\alpha_P}{2}} = \frac{r_P \cdot \left[1 \pm \cos \frac{\alpha_P}{2} \right]}{2 \cdot \sin \frac{\alpha_P}{2}} \end{aligned}$$

Pokud zvolíme $\alpha_P \in (0; \pi)$, pak $F_{P_1} > F_{P_2}$ (viz obrázek). Položíme tedy $F_P = F_{P_1}$. Potom můžeme psát konečný výraz pro výpočet ohniska paraboly F_P :

$$F_P = \frac{r_P \cdot \left[1 + \cos \frac{\alpha_P}{2}\right]}{2 \cdot \sin \frac{\alpha_P}{2}}, \quad \alpha_P \neq 0 \quad (6)$$

4.2.2 Parametry hyperboly

Z obrázku odečteme excentricitu e :

$$e = \frac{F_P - F_S}{2} \quad (7)$$

Vzhledem k tomu, že počátek souřadnicového systému byl zvolen ve vrcholu paraboly V_P , je průsečík asymptot hyperboly S_H dán vztahem:

$$S_H = F_S + e \quad (8)$$

Z definice hyperboly plyne pro hlavní poloosu a :

$$|r_1 - r_2| = 2a \Rightarrow a = \frac{|r_1 - r_2|}{2}$$

Vyjádříme vedlejší poloosu hyperboly b :

$$e^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = e^2 - a^2$$

Ze středové rovnice hyperboly v kanonickém tvaru (4) si vyjádříme $f(x)$:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow f(x) = y = \pm \sqrt{a^2 \left(1 + \frac{x^2}{b^2}\right)}$$

Zajímá nás kladná část hyperboly:

$$f(x) = \sqrt{a^2 \left(1 + \frac{x^2}{b^2}\right)}$$

$$f^2(x) = a^2 \left(1 + \frac{x^2}{e^2 - a^2}\right) = a^2 \left(\frac{e^2 - a^2 + x^2}{e^2 - a^2}\right) = \frac{a^2 e^2 - a^4 + a^2 x^2}{e^2 - a^2}$$

$$f^2(x)e^2 - f^2(x)a^2 = a^2 e^2 - a^4 + a^2 x^2$$

$$a^4 - (e^2 + x^2 + f^2(x))a^2 + f^2(x)e^2 = 0$$

Dostali, jsme *bikvadratickou* rovnici, kterou umíme vyřešit substitucí $a' = a^2$ jako *kvadratickou* rovnici:

$$a'^2 - (e^2 + x^2 + f^2(x))a' + f^2(x)e^2 = 0 \quad ; \quad a' = a^2$$

Za x dosadíme poloměr hyperboly r_H a za $f(x)$ její krajní hodnotu $f(r_H)$:

$$r_H = \frac{d_H}{2} \quad ; \quad f(r_H) = e - \frac{r_H}{\tan \frac{\alpha_P}{2}} \quad (9)$$

Kvadratická rovnice pak bude ve tvaru:

$$a'^2 - (e^2 + r_H^2 + f^2(r_H))a' + f^2(r_H)e^2 = 0 \quad ; \quad a' = a^2$$

Vyjádříme koeficienty kvadratické rovnice A, B, C a vypočítáme diskriminant D a kořeny a'_{12} :

$$\begin{aligned} A &= 1 \quad , \quad B = -(e^2 + r_H^2 + f^2(r_H)) \quad , \quad C = f^2(r_H)e^2 \\ a'_j &= \frac{-B \pm \sqrt{D}}{2A} \quad , \quad D = B^2 - 4AC \quad ; \quad j = \{1, 2\} \\ a_{ij} &= \begin{pmatrix} \sqrt{a'_1} & \sqrt{a'_2} \\ -\sqrt{a'_1} & -\sqrt{a'_2} \end{pmatrix} \quad ; \quad i, j = \{1, 2\} \\ a &\equiv a_{12} = \sqrt{a'_2} \end{aligned} \quad (10)$$

Vedlejší poloosa hyperboly b je:

$$b = \sqrt{e^2 - a^2} \quad (11)$$

Vrchol hyperboly V_H vypočítáme podle vztahu:

$$V_H = S_H + a \quad (12)$$

Ohniskový úhel soustavy α_S vypočítáme podle vztahu:

$$\begin{aligned} \tan \frac{\alpha_S}{2} &= \frac{r_H}{e + f(r_H)} \\ \alpha_S &= 2 \cdot \tan^{-1} \frac{r_H}{e + f(r_H)} \end{aligned} \quad (13)$$

Úhel asymptot hyperboly ω_H vypočítáme podle vztahu:

$$\omega_H = \pi - 2 \cdot \tan^{-1} \frac{a}{b} \quad (14)$$

Ohniskový poměr soustavy f je dán vztahem:

$$f = \frac{2F_P - F_S}{d_P} \quad (15)$$

4.2.3 Výpočet tabulkových hodnot paraboly a hyperboly pro výrobu šablon

Tabulkové hodnoty pro parabolu:

$$f_P(x) = \frac{1}{4F_P} x^2 \quad , \quad x \in \langle -r_P, r_P \rangle \quad (16)$$

Tabulkové hodnoty pro hyperbolu:

$$f_H(x) = \sqrt{a^2 \left(1 + \frac{x^2}{e^2 - a^2}\right)} \quad , \quad x \in \langle -r_H, r_H \rangle \quad (17)$$

4.2.4 Příklad pro konkrétní zadané hodnoty

Vstupní (zadané) hodnoty:

Průměr paraboloidu $d_P = 5$ m

Průměr hyperboloidu $d_H = 1$ m

Ohniskový úhel paraboloidu $\alpha_P = 120^\circ = 2\pi/3$ rad

Ohnisko soustavy $F_S = 0,5$ m

Výstupní (vypočtené) hodnoty:

Poloměr paraboly r_P :

$$r_P = \frac{d_P}{2} = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ m}$$

Ohnisko paraboly F_P :

$$F_P = \frac{r_P \cdot \left[1 + \cos \frac{\alpha_P}{2}\right]}{2 \cdot \sin \frac{\alpha_P}{2}} = \frac{2,5 \cdot \left[1 + \cos \frac{4\pi}{6 \cdot 2}\right]}{2 \cdot \sin \frac{4\pi}{6 \cdot 2}} \cong 2,16506 \text{ m}$$

Excentricita hyperboly e :

$$e = \frac{F_P - F_S}{2} = \frac{2,16506 - 0,5}{2} \cong 0,83253 \text{ m}$$

Průsečík asymptot hyperboly S_H :

$$S_H = F_S + e = 0,5 + 0,83253 = 1,33253 \text{ m}$$

Poloměr hyperboly r_H :

$$r_H = \frac{d_H}{2} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ m}$$

Krajní hodnota hyperboly $f(r_H)$:

$$f(r_H) = e - \frac{r_H}{\tan \frac{\alpha_P}{2}} = 0,8326 - \frac{0,5}{\tan \frac{4\pi}{6 \cdot 2}} \cong 0,54386 \text{ m}$$

Hlavní poloosa hyperboly a :

$$A = 1$$

$$B = -(e^2 + r_H^2 + f^2(r_H)) = -(0,83253^2 + 0,5^2 + 0,54386^2) \cong -1,23889$$

$$C = f^2(r_H)e^2 = 0,54386^2 \cdot 0,83253 \cong 0,20501$$

$$D = B^2 - 4AC = (-1,23889)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0,20501 \cong 0,71481$$

$$a' = \frac{-B - \sqrt{D}}{2A} = \frac{1,23889 - \sqrt{0,71481}}{2 \cdot 1} \cong 0,19671$$

$$a = \sqrt{a'} = \sqrt{0,19671} \cong 0,44352 \text{ m}$$

Vedlejší poloosa hyperboly b :

$$b = \sqrt{e^2 - a^2} = \sqrt{0,83253^2 - 0,44352^2} \cong 0,70456 \text{ m}$$

Vrchol hyperboly V_H :

$$V_H = S_H + a = 1,33253 + 0,44352 = 1,77605 \text{ m}$$

Ohniskový úhel soustavy α_S :

$$\alpha_s = 2 \cdot \tan^{-1} \frac{r_H}{e + f(r_H)} = 2 \cdot \tan^{-1} \frac{0,5}{0,83253 + 0,54386} \cong 0,69689 \text{ rad} \cong 39,9291^\circ$$

Úhel asymptot hyperboly ω_H :

$$\omega_H = \pi - 2 \cdot \tan^{-1} \frac{a}{b} = \pi - 2 \cdot \tan^{-1} \frac{0,44352}{0,70456} \cong 2,01793 \text{ rad}$$

Ohniskový poměr soustavy f :

$$f = \frac{2F_P - F_S}{d_P} = \frac{2 \cdot 2,16506 - 0,5}{5} \cong 0,76603$$

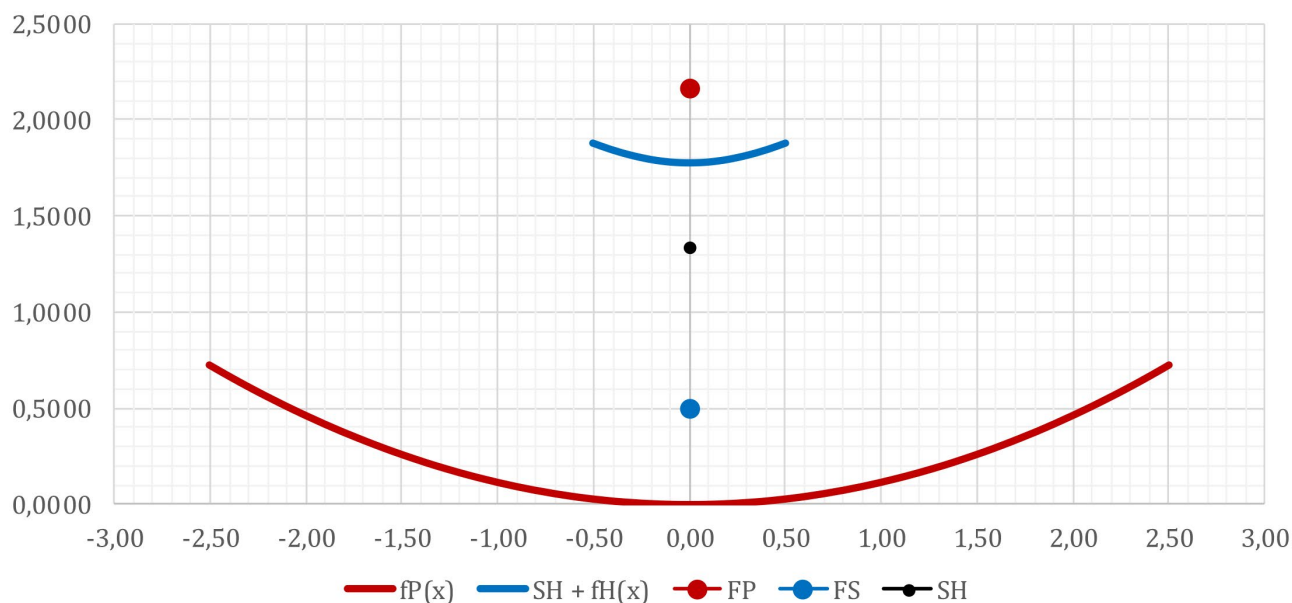
Souřadnice bodů v rovině $[x, f_P(x)]$ paraboly a $[x, f_H(x)]$ hyperboly pro výrobu šablon:

$$f_P(x) = \frac{1}{4F_P} x^2 = \frac{1}{4 \cdot 2,1651} x^2, \quad x \in \langle -r_P, r_P \rangle = \langle -2,5, 2,5 \rangle$$

$$f_H(x) = \sqrt{a^2 \left(1 + \frac{x^2}{e^2 - a^2} \right)} = \sqrt{0,44352^2 \left(1 + \frac{x^2}{0,83253^2 - 0,44352^2} \right)}, \quad x \in \langle -r_H, r_H \rangle$$

$$= \langle -0,5, 0,5 \rangle$$

Grafická reprezentace:



Tabulkové hodnoty:

x	$f_P(x)$	$f_H(x) - a$	F_S	S_H	F_P
-2,50	0,7217				
-2,40	0,6651				
-2,30	0,6108				
-2,20	0,5589				
-2,10	0,5092				
-2,00	0,4619				
-1,90	0,4168				
-1,80	0,3741				
-1,70	0,3337				
-1,60	0,2956				
-1,50	0,2598				
-1,40	0,2263				
-1,30	0,1951				
-1,20	0,1663				
-1,10	0,1397				
-1,00	0,1155				
-0,90	0,0935				
-0,80	0,0739				
-0,70	0,0566				
-0,60	0,0416				
-0,50	0,0289	0,1003			
-0,40	0,0185	0,0665			
-0,30	0,0104	0,0385			
-0,20	0,0046	0,0175			
-0,10	0,0012	0,0044			
0,00	0,0000	0,0000	0,5000	1,3325	2,1651
0,10	0,0012	0,0044			
0,20	0,0046	0,0175			
0,30	0,0104	0,0385			
0,40	0,0185	0,0665			
0,50	0,0289	0,1003			
0,60	0,0416				
0,70	0,0566				
0,80	0,0739				
0,90	0,0935				
1,00	0,1155				
1,10	0,1397				
1,20	0,1663				
1,30	0,1951				
1,40	0,2263				
1,50	0,2598				
1,60	0,2956				
1,70	0,3337				
1,80	0,3741				
1,90	0,4168				
2,00	0,4619				
2,10	0,5092				
2,20	0,5589				
2,30	0,6108				
2,40	0,6651				
2,50	0,7217				