

GRAVITAČNÍ KONSTANTA

OBSAH

1. ÚVOD.....	2
2. FYZIKA A MATEMATIKA	4
2.1 Newtonův gravitační zákon.....	4
2.2 Druhý Newtonův pohybový zákon (zákon síly).....	4
2.3 Vyjádření gravitační konstanty z Newtonových zákonů	4
2.3.1 Příklad měření gravitační konstanty.....	4
2.4 Rovnice elipsy.....	5
2.4.1 Středová rovnice elipsy.....	6
2.4.2 Rovnice elipsy v polárních souřadnicích.....	8
2.5 Vektorové vyjádření pohybu v polárních souřadnicích.....	12
2.6 Moment hybnosti v polárním systému souřadnic.....	13
2.7 Druhý Keplerův zákon.....	15
2.8 Třetí Keplerův zákon.....	17
2.8.1 Kruhová trajektorie.....	18
2.8.2 Eliptická trajektorie.....	19

1. ÚVOD

Na internetu jsem narazil na velmi kuriózní článek z 9.8.2013 uveřejněného na serveru Matrix 2001 s názvem [Temná hmota je absurdita vesmíru vytvořená chybnými výpočty fyziků](#) od autora jménem Ing. Jiří Muladi. Než budete pokračovat v tomto textu, článek si nejprve přečtěte. Autor zde vychloubačným arogantním způsobem napadá fyziky od roku 1933 ohledně údajné chyby ve výpočtech namísto toho, aby si sám překontroloval svůj myšlenkový postup. Podle něj mají všechna vesmírná tělesa přibližně šestkrát (přesně 2π krát) větší hmotnost, takže díky tomu není nutné zvažovat ve vesmíru přítomnost *temné hmoty*. V závěru článku nabízí svůj jednoduchý „matematický důkaz“, ve kterém hned v úvodu přeformuloval *Třetí Keplerův zákon*, který popisuje jako vztah mezi velikostí drah a dobou oběhu planet kolem Slunce namísto vztahu mezi velikostí *hlavních poloos* a dobou oběhu. Rovněž si zřejmě neuvědomil, že tělesa obíhají obecně po eliptických drahách nikoli po kruhových. Ve svém „důkazu“ pracuje s kruhovou oběžnou dráhou a do *Třetího Keplerova zákona* namísto poloměru zavádí délku dráhy, což je poloměr vynásobený konstantou 2π . Tvrdí, že *Třetí Keplerův zákon* musí být rozšířen právě o tuto konstantu 2π . Nejprve si napíšme, jak zní správně *Třetí Keplerův zákon* (viz také níže v dokumentu):

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \Rightarrow \frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} \Rightarrow \frac{a_1^3}{T_1^2} = \frac{a_2^3}{T_2^2} ; \quad \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \Rightarrow \frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

Z Newtonových zákonů (viz také níže v dokumentu) plyne gravitační konstanta:

$$G = \frac{R^2 a_g}{M}$$

Podle autora článku má mít „modifikovaný Třetí Keplerův zákon“ pro $a = R$ tvar:

$$\frac{(2\pi \cdot R_1)^3}{T_1^2} = \frac{(2\pi \cdot R_2)^3}{T_2^2} = (2\pi)^3 \frac{GM}{4\pi^2} = 2\pi \cdot GM = \tilde{G}M$$

nebo

$$\frac{(2\pi \cdot R)^3}{T^2} = \frac{2\pi R \cdot (2\pi R)^2}{T^2} = 2\pi R \cdot v^2 = (2\pi)^3 \frac{GM}{4\pi^2} = 2\pi \cdot GM = \tilde{G}M$$

Kde $\tilde{G}$ je autorem „modifikovaná gravitační konstanta“:

$$\tilde{G} = 2\pi \cdot G = 2\pi \cdot \frac{R^2 a_g}{M}$$

Tvrdí, že pokud je z tohoto „inovovaného“ vzorce počítána hmotnost M , pak tato hmotnost musí být 2π krát větší, což je evidentní nesmysl, jak můžeme vidět zde:

$$\tilde{G} = 2\pi \cdot G = 2\pi \cdot \frac{R^2 a_g}{M} \Rightarrow M = 2\pi \cdot \frac{R^2 a_g}{\tilde{G}} = 2\pi \cdot \frac{R^2 a_g}{2\pi \cdot G} = \frac{R^2 a_g}{G}$$

Jak můžeme vidět, hmotnost M je stejná jako s původní gravitační konstantou G , protože čitatel i jmenovatel je vynásoben stejnou konstantou 2π , takže podíl se nezměnil. Zde se tedy dopustil myšlenkové chyby. Poznamenejme ještě, že „modifikovaný Newtonův gravitační zákon“ by podle něj pak vypadal takto:

$$F = \frac{1}{2\pi} \cdot \tilde{G} \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{R^2} = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi \cdot G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{R^2}$$

I zde je vidět, že síla mezi tělesy se nezměnila. Je tedy zbytečné zavádět koeficient 2π , který nemá vliv na rovnici, když se pak s ním stejně vykrátí autorem „inovovaná“ gravitační konstanta ve vzorci pro sílu mezi dvěma tělesy. I silové působení jakékoli hmoty je tedy stále stejné, takže problém *temné hmoty* to rozhodně nevyřešilo.

Uvádím to zde, jako zajímavý příklad povrchního myšlení nebo snad zvláštního smyslu pro humor. Neustále mě překvapuje, co jsou lidé, dokonce i „vzdělání s titulem“, schopni vyplodit za úvahy. K dnešnímu dni je článek stále přístupný na zmiňovaném serveru, což by mohlo naznačovat, že autor si patrně tento nesmysl stále neuvědomil. Článek řadím do stejné kategorie, jako například články, ve kterých se lidé snaží dokázat, že Země je placatá. Ve všech těchto pojednáních lze snadno nalézt základní chyby v úsudku.

V dalším textu tohoto dokumentu se můžete podívat na fyzikální zákony a matematiku týkající se této problematiky. Nejprve si připomeneme *Newtonův gravitační zákon* a *Zákon síly*, princip měření *gravitační konstanty*, matematiku eliptické dráhy v polárních souřadnicích, vektorové vyjádření pohybu po eliptické dráze, moment hybnosti, *Druhý Keplerův zákon* až se nakonec dostaneme k důkazu *Třetího Keplerova zákona*.

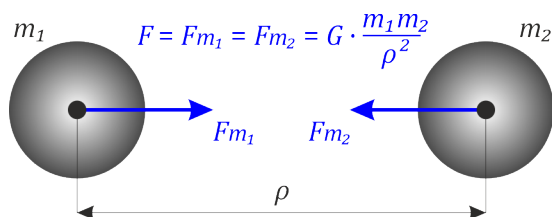
Poznamenejme, že následující text předpokládá alespoň znalosti středoškolské matematiky a fyziky.

2. FYZIKA A MATEMATIKA

2.1 Newtonův gravitační zákon

Každá dvě tělesa o hmotnostech m_1 a m_2 , která můžeme dostatečně přesně aproximovat body, nebo jsou sféricky symetrická, působí na sebe gravitační silou přímo úměrnou hmotnostem těles a nepřímo úměrnou čtverci jejich vzdálenosti. Platí:

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{\rho^2} \quad 1$$



Vektorový tvar Newtonova gravitačního zákona je:

$$\vec{F} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{\rho^2} \cdot \frac{\vec{\rho}}{\rho} \quad 2$$

kde $\vec{F}$ je vektor síly G je gravitační konstanta, M a m_1, m_2 hmotnosti těles, ρ jejich vzdálenost (délka průvodiče), $\vec{\rho}$ průvodič (vektor) vedený z těžiště centrálního tělesa o hmotnosti M do těžiště obíhající planety o hmotnosti m .

2.2 Druhý Newtonův pohybový zákon (zákon síly)

Jestliže na těleso působí síla, pak se těleso pohybuje se zrychlením, které je přímo úměrné působící síle a nepřímo úměrné hmotnosti tělesa. Platí:

$$F = m \cdot a_g = m \cdot \frac{dv}{dt} = m \cdot \frac{d^2\rho}{dt^2} \quad 3$$

Matematický zápis ve vektorovém tvaru je:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}_g = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \frac{d^2\vec{\rho}}{dt^2} \quad 4$$

kde m hmotnost tělesa, $\vec{a}_g$ vektor gravitačního zrychlení, $\vec{v}$ vektor rychlosti, $\vec{\rho}$ vektor vzdálenosti, kterou urazí těleso za čas t ve směru působící síly $\vec{F}$.

2.3 Vyjádření gravitační konstanty z Newtonových zákonů

Z výrazu (1) a (3) si vyjádříme gravitační konstantu:

$$F = G \cdot \frac{m \cdot M}{\rho^2} = m \cdot a_g \Rightarrow G \cdot M = \rho^2 \cdot a_g$$

$$G = \frac{\rho^2 a_g}{M} \quad 5$$

2.3.1 Příklad měření gravitační konstanty

Na velmi citlivých rovnoramenných vahách vážíme kouli o hmotnosti m . Poté pod ni umístíme mnohem hmotnější kouli o hmotnosti M , jejíž těžiště je ve vzdálenosti ρ od těžiště menší koule. Působením gravitační síly mezi oběma koulemi se ručička vah vychýlí. Rovnováha je pak obnovena přidáním závaží o hmotnosti m_z . Mezi oběma koulemi působí gravitační síla:

$$F_m = G \cdot \frac{m \cdot M}{\rho^2}$$

Mezi přidávným závažím s hmotností m_z a Zemí působí gravitační síla:

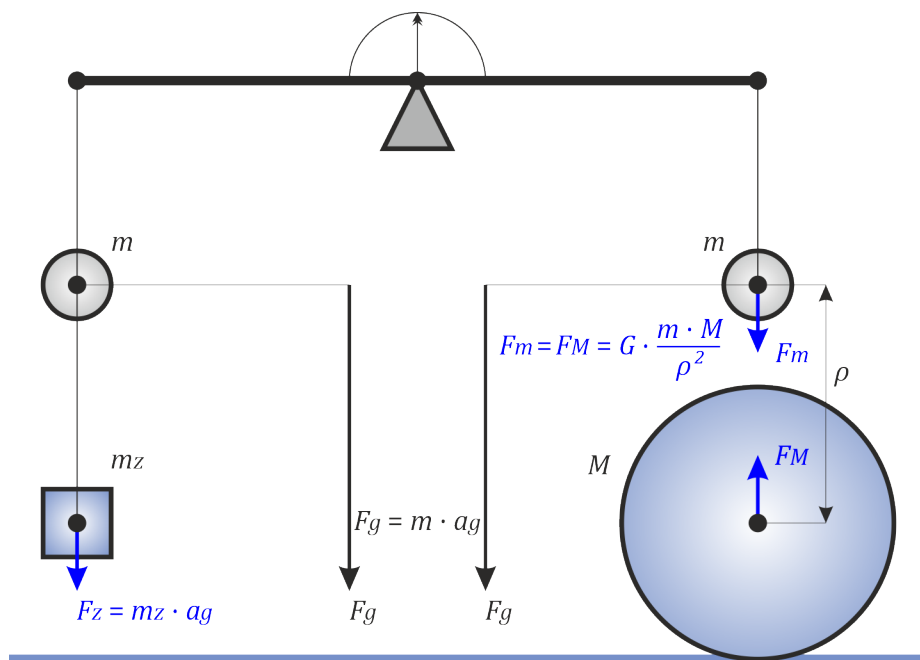
$$F_z = m_z \cdot a_g$$

Pro opětovnou rovnováhu platí rovnost:

$$F_m = F_z \Rightarrow G \cdot \frac{m \cdot M}{\rho^2} = m_z \cdot a_g$$

$$G = \frac{\rho^2 \cdot m_z \cdot a_g}{m \cdot M}$$

6

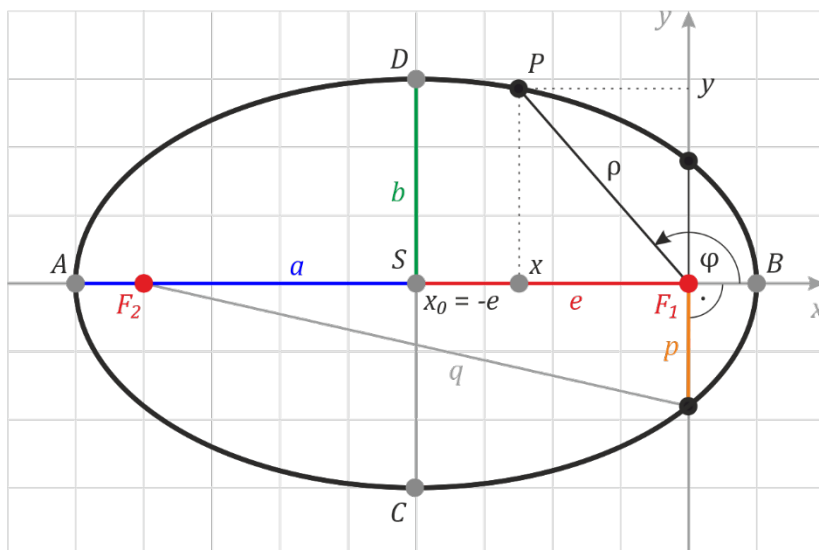


2.4 Rovnice elipsy

Definice

Elipsa je uzavřená křivka v rovině, u které všechny její body mají stejný součet vzdáleností od dvou pevně zvolených bodů, takzvaných *ohnisek*, takže platí:

$$p + q = 2a$$

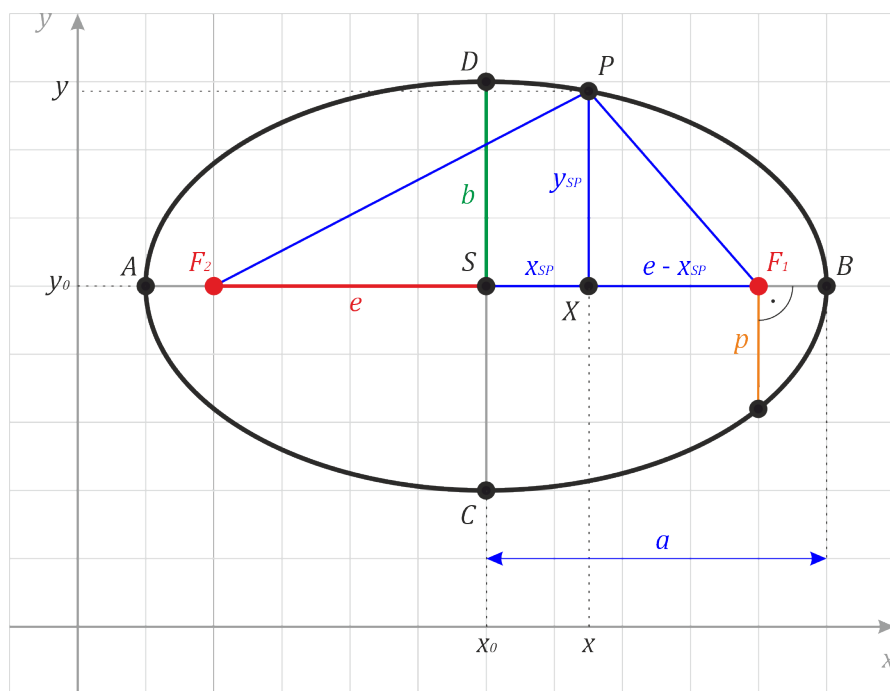


$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

7

Kde a je délka *hlavní poloosy*, b je délka *vedlejší poloosy* a $[x; y]$ jsou souřadnice libovolného bodu elipsy. V kartézských souřadnicích v poloze se středem v počátku, tzn. pro $[x_0; y_0] = [0; 0]$, lze rovnici vyjádřit jako:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Důkaz

Z definice elipsy víme, že platí:

$$|F_1P| + |F_2P| = |AB| = 2a$$

Dále vyjádříme délku úseček F_1P a F_2P :

$$|F_1P| = \sqrt{|e - x_{SP}|^2 + y_{SP}^2}$$

$$|F_2P| = \sqrt{|e + x_{SP}|^2 + y_{SP}^2}$$

Dosadíme do první rovnice a dostáváme:

$$\sqrt{|e - x_{SP}|^2 + y_{SP}^2} + \sqrt{|e + x_{SP}|^2 + y_{SP}^2} = 2a$$

Upravíme do výsledného tvaru:

$$(|e - x_{SP}|^2 + y_{SP}^2) + 2\sqrt{|e - x_{SP}|^2 + y_{SP}^2}\sqrt{|e + x_{SP}|^2 + y_{SP}^2} + (|e + x_{SP}|^2 + y_{SP}^2) = 4a^2$$

$$(|e - x_{SP}|^2 + y_{SP}^2) + 2\sqrt{(|e - x_{SP}|^2 + y_{SP}^2)(|e + x_{SP}|^2 + y_{SP}^2)} + (|e + x_{SP}|^2 + y_{SP}^2) = 4a^2$$

$$(e^2 - 2ex_{SP} + x_{SP}^2 + y_{SP}^2) + 2\sqrt{(e^2 - 2ex_{SP} + x_{SP}^2 + y_{SP}^2)(e^2 + 2ex_{SP} + x_{SP}^2 + y_{SP}^2)} + (e^2 + 2ex_{SP} + x_{SP}^2 + y_{SP}^2)$$

$$\begin{aligned}
& +(e^2 + 2ex_{SP} + x_{SP}^2 + y_{SP}^2) = 4a^2 \\
& (e^2 - 2ex_{SP} + x_{SP}^2 + y_{SP}^2) \\
& + 2 \sqrt{\frac{e^4 + 2e^3x_{SP} + e^2x_{SP}^2 + e^2y_{SP}^2 - 2e^3x_{SP} - 4e^2x_{SP}^2 - 2ex_{SP}^3 - 2ex_{SP}y_{SP}^2}{+e^2x_{SP}^2 + 2ex_{SP}^3 + x_{SP}^4 + x_{SP}^2y_{SP}^2 + e^2y_{SP}^2 + 2ex_{SP}y_{SP}^2 + x_{SP}^2y_{SP}^2 + y_{SP}^4}} \\
& +(e^2 + 2ex_{SP} + x_{SP}^2 + y_{SP}^2) = 4a^2 \\
& (e^2 - 2ex_{SP} + x_{SP}^2 + y_{SP}^2) + 2 \sqrt{e^4 - 2e^2x_{SP}^2 + 2e^2y_{SP}^2 + x_{SP}^4 + 2x_{SP}^2y_{SP}^2 + y_{SP}^4} \\
& +(e^2 + 2ex_{SP} + x_{SP}^2 + y_{SP}^2) = 4a^2 \\
& 2 \sqrt{e^4 - 2e^2x_{SP}^2 + 2e^2y_{SP}^2 + x_{SP}^4 + 2x_{SP}^2y_{SP}^2 + y_{SP}^4} \\
& = 4a^2 - (e^2 - 2ex_{SP} + x_{SP}^2 + y_{SP}^2) - (e^2 + 2ex_{SP} + x_{SP}^2 + y_{SP}^2) \\
& 2 \sqrt{e^4 - 2e^2x_{SP}^2 + 2e^2y_{SP}^2 + x_{SP}^4 + 2x_{SP}^2y_{SP}^2 + y_{SP}^4} = 4a^2 - 2e^2 - 2x_{SP}^2 - 2y_{SP}^2 \\
& 4(e^4 - 2e^2x_{SP}^2 + 2e^2y_{SP}^2 + x_{SP}^4 + 2x_{SP}^2y_{SP}^2 + y_{SP}^4) = (4a^2 - 2e^2 - 2x_{SP}^2 - 2y_{SP}^2)^2 \\
& 4e^4 - 8e^2x_{SP}^2 + 8e^2y_{SP}^2 + 4x_{SP}^4 + 8x_{SP}^2y_{SP}^2 + 4y_{SP}^4 \\
& = 16a^4 - 8a^2e^2 - 8a^2x_{SP}^2 - 8a^2y_{SP}^2 - 8a^2e^2 + 4e^4 + 4e^2x_{SP}^2 + 4e^2y_{SP}^2 - 8a^2x_{SP}^2 \\
& + 4e^2x_{SP}^2 + 4x_{SP}^4 + 4x_{SP}^2y_{SP}^2 - 8a^2y_{SP}^2 + 4e^2y_{SP}^2 + 4x_{SP}^2y_{SP}^2 + 4y_{SP}^4 \\
& - 8e^2x_{SP}^2 + 8e^2y_{SP}^2 + 8x_{SP}^2y_{SP}^2 + 4e^4 + 4x_{SP}^4 + 4y_{SP}^4 \\
& = 16a^4 - 16a^2e^2 - 16a^2x_{SP}^2 - 16a^2y_{SP}^2 + 8e^2x_{SP}^2 + 8e^2y_{SP}^2 + 8x_{SP}^2y_{SP}^2 + 4e^4 + 4x_{SP}^4 \\
& + 4y_{SP}^4 \\
& - 16e^2x_{SP}^2 = 16a^4 - 16a^2e^2 - 16a^2x_{SP}^2 - 16a^2y_{SP}^2 \\
& - e^2x_{SP}^2 = a^4 - a^2e^2 - a^2x_{SP}^2 - a^2y_{SP}^2 \\
& -(a^2 - b^2)x_{SP}^2 = a^4 - a^2(a^2 - b^2) - a^2x_{SP}^2 - a^2y_{SP}^2 \\
& - a^2x_{SP}^2 + b^2x_{SP}^2 = a^4 - a^4 + a^2b^2 - a^2x_{SP}^2 - a^2y_{SP}^2 \\
& b^2x_{SP}^2 = a^2b^2 - a^2y_{SP}^2 \\
& \frac{b^2x_{SP}^2}{a^2b^2} = 1 - \frac{a^2y_{SP}^2}{a^2b^2} \\
& \frac{x_{SP}^2}{a^2} + \frac{y_{SP}^2}{b^2} = 1
\end{aligned}$$

Protože platí, že $x_{SP} = x - x_0$ a $y_{SP} = y - y_0$, dostáváme kanonický tvar rovnice elipsy:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Q. E. D.

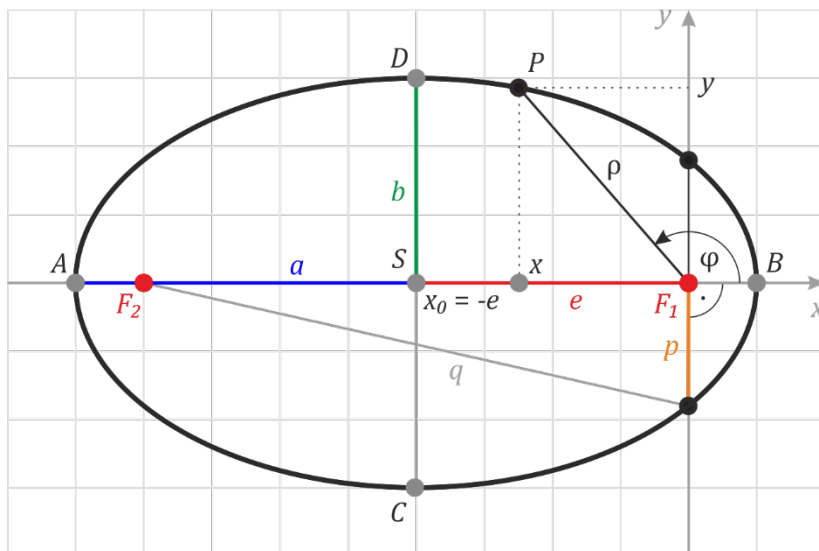
2.4.2 Rovnice elipsy v polárních souřadnicích

Věta

Necht' ohnisko elipsy F_1 leží v počátku souřadnicové soustavy a polární osou je polopřímka F_1A , pak můžeme psát rovnici elipsy v polárních souřadnicích ve tvaru:

$$\rho_{12} = \frac{\pm p}{1 \pm \varepsilon \cos \varphi} \quad 8$$

kde $\varepsilon = e/a < 1$ je tzv. *numerická excentricita*, což je míra zploštění elipsy oproti kružnici a $p = b^2/a$ je parametr elipsy. Geometrický význam parametru p je polovina délky tětiny vedené ohniskem kolmo na hlavní osu.



Důkaz

Nejprve odvodíme rovnici pro parametr p pomocí tří rovnic:

$$p + q = 2a \Rightarrow q = 2a - p$$

$$p^2 + (2e)^2 = q^2$$

$$e^2 = a^2 - b^2$$

Upravíme:

$$p^2 + 4e^2 = (2a - p)^2$$

$$p^2 + 4e^2 = 4a^2 - 4ap + p^2$$

$$4e^2 = 4a^2 - 4ap$$

$$4(a^2 - b^2) = 4a^2 - 4ap$$

$$4a^2 - 4b^2 = 4a^2 - 4ap$$

$$b^2 = ap \Rightarrow p = \frac{b^2}{a}$$

Při vlastním odvození rovnice elipsy v polárních souřadnicích vyjdeme ze středové rovnice:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Pokud ohnisko F_1 leží v počátku souřadnicového systému a hlavní osa je rovnoběžná s osou x , pak jsou parametry $x_0 = -e$ a $y_0 = 0$. Dosadíme a dostáváme tvar:

$$\frac{(x+e)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Z obrázku vyčteme, že platí:

$$\cos \varphi = \frac{x}{\rho} \Rightarrow x = \rho \cos \varphi$$

$$\sin \varphi = \frac{y}{\rho} \Rightarrow y = \rho \sin \varphi$$

Dále platí:

$$e = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$e^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - e^2$$

$$\varepsilon = \frac{e}{a} \Rightarrow e = \varepsilon a$$

$$p = \frac{b^2}{a} \Rightarrow a = \frac{b^2}{p} = \frac{a^2 - e^2}{p} = \frac{a^2 - \varepsilon^2 a^2}{p} \Rightarrow a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2}, \quad b^2 = \frac{p^2}{1 - \varepsilon^2}, \quad e = \frac{\varepsilon p}{1 - \varepsilon^2}$$

Dosadíme do rovnice elipsy a upravíme:

$$\frac{(x+e)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2 + 2xe + e^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$b^2 x^2 + 2b^2 x e + b^2 e^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$$

$$\frac{p^2}{1 - \varepsilon^2} \rho^2 \cos^2 \varphi + 2 \frac{p^2}{1 - \varepsilon^2} \rho \cos \varphi \frac{\varepsilon p}{1 - \varepsilon^2} + \frac{p^2}{1 - \varepsilon^2} \cdot \frac{\varepsilon^2 p^2}{(1 - \varepsilon^2)^2} + \frac{p^2}{(1 - \varepsilon^2)^2} \rho^2 \sin^2 \varphi$$

$$= \frac{p^2}{(1 - \varepsilon^2)^2} \cdot \frac{p^2}{1 - \varepsilon^2}$$

$$\frac{\rho^2 \cos^2 \varphi}{1 - \varepsilon^2} + 2 \frac{\varepsilon p \rho \cos \varphi}{(1 - \varepsilon^2)^2} + \frac{\varepsilon^2 p^2}{(1 - \varepsilon^2)^3} + \frac{\rho^2 \sin^2 \varphi}{(1 - \varepsilon^2)^2} = \frac{p^2}{(1 - \varepsilon^2)^3}$$

$$(1 - \varepsilon^2)^2 \rho^2 \cos^2 \varphi + 2(1 - \varepsilon^2) \varepsilon p \rho \cos \varphi + \varepsilon^2 p^2 + (1 - \varepsilon^2) \rho^2 \sin^2 \varphi = p^2$$

$$(1 - 2\varepsilon^2 + \varepsilon^4) \rho^2 \cos^2 \varphi + 2(1 - \varepsilon^2) \varepsilon p \rho \cos \varphi + \varepsilon^2 p^2 + (1 - \varepsilon^2) \rho^2 \sin^2 \varphi = p^2$$

$$\rho^2 \cos^2 \varphi - 2\varepsilon^2 \rho^2 \cos^2 \varphi + \varepsilon^4 \rho^2 \cos^2 \varphi + 2\varepsilon p \rho \cos \varphi + 2\varepsilon^3 p \rho \cos \varphi + \varepsilon^2 p^2 + \rho^2 \sin^2 \varphi - \varepsilon^2 \rho^2 \sin^2 \varphi = p^2$$

$$\rho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) - 2\varepsilon^2 \rho^2 \cos^2 \varphi - \varepsilon^2 \rho^2 (1 - \cos^2 \varphi) + \varepsilon^4 \rho^2 \cos^2 \varphi + 2\varepsilon p \rho \cos \varphi + 2\varepsilon^3 p \rho \cos \varphi + \varepsilon^2 p^2 = p^2$$

$$\rho^2 - 2\varepsilon^2 \rho^2 \cos^2 \varphi - \varepsilon^2 \rho^2 + \varepsilon^2 \rho^2 \cos^2 \varphi + \varepsilon^4 \rho^2 \cos^2 \varphi + 2\varepsilon p \rho \cos \varphi + 2\varepsilon^3 p \rho \cos \varphi + \varepsilon^2 p^2 = p^2$$

$$\rho^2 - \varepsilon^2 \rho^2 - \varepsilon^2 \rho^2 \cos^2 \varphi + \varepsilon^4 \rho^2 \cos^2 \varphi + 2\varepsilon p \rho \cos \varphi + 2\varepsilon^3 p \rho \cos \varphi + \varepsilon^2 p^2 = p^2$$

$$\rho^2 (1 - \varepsilon^2) - \varepsilon^2 \rho^2 \cos^2 \varphi (1 - \varepsilon^2) + 2\varepsilon p \rho \cos \varphi (1 - \varepsilon^2) = p^2 (1 - \varepsilon^2)$$

$$\rho^2 - \varepsilon^2 \rho^2 \cos^2 \varphi + 2\varepsilon p \rho \cos \varphi = p^2$$

$$(1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi) \rho^2 + (2\varepsilon p \cos \varphi) \rho + (-p^2) = 0$$

Dostali jsme tvar kvadratické rovnice $Ax^2 + Bx + C = 0$. Jednotlivé koeficienty A, B, C a diskriminant D jsou:

$$A = 1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi$$

$$B = 2\varepsilon p \cos \varphi$$

$$C = -p^2$$

$$D = B^2 - 4AC$$

Můžeme tedy vyjádřit vzdálenost ρ libovolného bodu elipsy od počátku souřadnicového systému (při poloze ohniska elipsy F_1 v počátku souřadnicové soustavy) jako funkci úhlu φ a numerické excentricity ε :

$$\begin{aligned} \rho_{12} &= \frac{-B \pm \sqrt{D}}{2A} = \frac{-2\varepsilon p \cos \varphi \pm \sqrt{(2\varepsilon p \cos \varphi)^2 - 4(1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi)(-p^2)}}{2(1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi)} \\ &= \frac{-2\varepsilon p \cos \varphi \pm \sqrt{4\varepsilon^2 p^2 \cos^2 \varphi + 4p^2 - 4\varepsilon^2 p^2 \cos^2 \varphi}}{2(1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi)} = \frac{-\varepsilon p \cos \varphi}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi} \pm \sqrt{\frac{p^2}{(1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi)^2}} \\ &= \frac{-\varepsilon p \cos \varphi}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi} \pm \frac{p}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi} = \frac{-\varepsilon p \cos \varphi \pm p}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi} = \frac{p(-\varepsilon \cos \varphi \pm 1)}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi} = \frac{p(\pm 1 - \varepsilon \cos \varphi)}{(1 - \varepsilon \cos \varphi)(1 + \varepsilon \cos \varphi)} \\ \rho_1 &= \frac{p(1 - \varepsilon \cos \varphi)}{(1 - \varepsilon \cos \varphi)(1 + \varepsilon \cos \varphi)} = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \\ \rho_2 &= \frac{p(-1 - \varepsilon \cos \varphi)}{(1 - \varepsilon \cos \varphi)(1 + \varepsilon \cos \varphi)} = -\frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi} \end{aligned}$$

Kontrola:

1. Dosazením kořene ρ_1 do kvadratické rovnice:

$$\begin{aligned} (1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi)\rho^2 + (2\varepsilon p \cos \varphi)\rho + (-p^2) &= 0 \\ (1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi)\left(\frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}\right)^2 + 2\varepsilon p \cos \varphi \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi} - p^2 &= 0 \\ (1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi)\frac{p^2}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)(1 + \varepsilon \cos \varphi)} + \frac{2\varepsilon p^2 \cos \varphi}{1 + \varepsilon \cos \varphi} - p^2 &= 0 \\ \frac{(1 - \varepsilon \cos \varphi)(1 + \varepsilon \cos \varphi)}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)(1 + \varepsilon \cos \varphi)} + \frac{2\varepsilon \cos \varphi}{1 + \varepsilon \cos \varphi} - 1 &= 0 \\ \frac{1 - \varepsilon \cos \varphi}{1 + \varepsilon \cos \varphi} + \frac{2\varepsilon \cos \varphi}{1 + \varepsilon \cos \varphi} - 1 &= 0 \\ \frac{1 - \varepsilon \cos \varphi + 2\varepsilon \cos \varphi - 1 - \varepsilon \cos \varphi}{1 + \varepsilon \cos \varphi} &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Rovnice platí pro všechna $\varepsilon, \varphi \in \mathbb{R}$, to znamená, že ρ_1 je kořenem.

2. Dosazením kořene ρ_2 do kvadratické rovnice:

$$(1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi)\rho^2 + (2\varepsilon p \cos \varphi)\rho + (-p^2) = 0$$

$$(1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi) \left(-\frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi} \right)^2 + 2\varepsilon p \cos \varphi \left(-\frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi} \right) - p^2 = 0$$

$$(1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi) \frac{p^2}{(1 - \varepsilon \cos \varphi)(1 - \varepsilon \cos \varphi)} - \frac{2\varepsilon p^2 \cos \varphi}{1 - \varepsilon \cos \varphi} - p^2 = 0$$

$$\frac{(1 - \varepsilon \cos \varphi)(1 + \varepsilon \cos \varphi)}{(1 - \varepsilon \cos \varphi)(1 - \varepsilon \cos \varphi)} - \frac{2\varepsilon \cos \varphi}{1 - \varepsilon \cos \varphi} - 1 = 0$$

$$\frac{1 + \varepsilon \cos \varphi}{1 - \varepsilon \cos \varphi} - \frac{2\varepsilon \cos \varphi}{1 - \varepsilon \cos \varphi} - 1 = 0$$

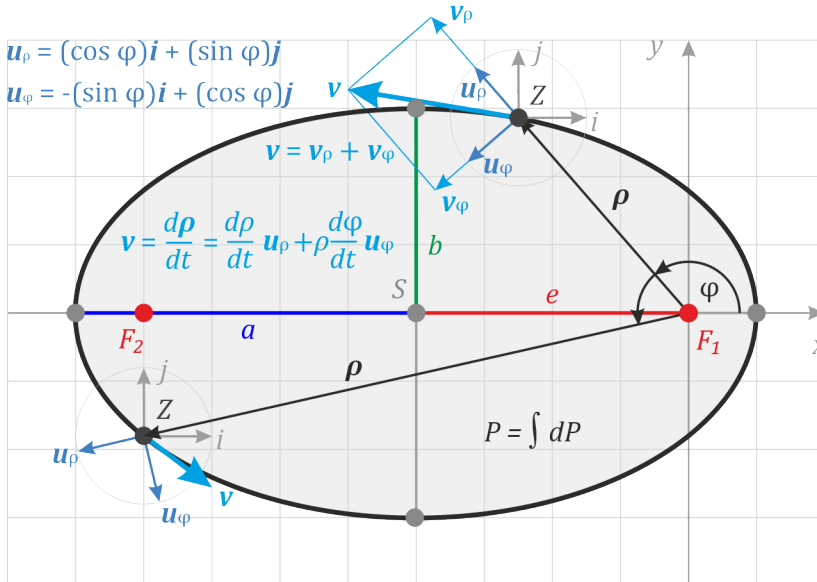
$$\frac{1 + \varepsilon \cos \varphi - 2\varepsilon \cos \varphi - 1 + \varepsilon \cos \varphi}{1 - \varepsilon \cos \varphi} = 0$$

$$0 = 0$$

Rovnice platí pro všechna $\varepsilon, \varphi \in \mathbb{R}$, to znamená, že ρ_2 je kořenem.

Q. E. D.

2.5 Vektorové vyjádření pohybu v polárních souřadnicích



Následující jednotkové vektory $\vec{u}_\rho$ a $\vec{u}_\varphi$ použijeme k odvození vektoru okamžitého zrychlení $\vec{a}_v$ a vektoru okamžité rychlosti $\vec{v}$:

$$\vec{u}_\rho = (\cos \varphi)\vec{i} + (\sin \varphi)\vec{j}$$

$$\vec{u}_\varphi = -(\sin \varphi)\vec{i} + (\cos \varphi)\vec{j}$$

$$\vec{u}_\rho = \frac{\vec{\rho}}{|\vec{\rho}|} = \frac{\vec{\rho}}{\rho} \Rightarrow \vec{\rho} = \rho \cdot \vec{u}_\rho$$

Abychom zjistili, jak se mění vektory $\vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi$ s ohledem na čas, provedeme nejprve derivace podle úhlu φ a následně podle času t :

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{d\varphi} = \frac{d[(\cos \varphi)\vec{i} + (\sin \varphi)\vec{j}]}{d\varphi} = -(\sin \varphi)\vec{i} + (\cos \varphi)\vec{j} = \vec{u}_\varphi$$

$$\frac{d\vec{u}_\varphi}{d\varphi} = \frac{d[-(\sin \varphi)\vec{i} + (\cos \varphi)\vec{j}]}{d\varphi} = -(\cos \varphi)\vec{i} - (\sin \varphi)\vec{j} = -\vec{u}_\rho$$

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \frac{d\vec{u}_\rho}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \vec{u}_\varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\frac{d\vec{u}_\varphi}{dt} = \frac{d\vec{u}_\varphi}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = -\vec{u}_\rho \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

Vyjádříme vektor okamžité rychlosti $\vec{v}$:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{\rho}}{dt} = \frac{d(\rho\vec{u}_\rho)}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\vec{u}_\rho + \rho \frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\vec{u}_\rho + \rho \frac{d\varphi}{dt}\vec{u}_\varphi = \vec{v}_\rho + \vec{v}_\varphi$$

$$\vec{v} = \frac{d\rho}{dt}\vec{u}_\rho + \rho \frac{d\varphi}{dt}\vec{u}_\varphi = \vec{v}_\rho + \vec{v}_\varphi$$

9

Vyjádříme vektor okamžitého zrychlení $\vec{a}_v$, což je derivace vektoru okamžité rychlosti $\vec{v}$ podle času t :

$$\begin{aligned} \vec{a}_v &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{d\rho}{dt}\vec{u}_\rho + \rho \frac{d\varphi}{dt}\vec{u}_\varphi \right] = \left(\frac{d\rho}{dt} \cdot \frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + \frac{d^2\rho}{dt^2}\vec{u}_\rho \right) + \left[\rho\vec{u}_\varphi \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{d}{dt}(\rho\vec{u}_\varphi) \frac{d\varphi}{dt} \right] \\ &= \left(\frac{d\rho}{dt} \cdot \frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + \frac{d^2\rho}{dt^2}\vec{u}_\rho \right) + \left[\rho\vec{u}_\varphi \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \left(\rho \frac{d\vec{u}_\varphi}{dt} + \frac{d\rho}{dt}\vec{u}_\varphi \right) \cdot \frac{d\varphi}{dt} \right] \\ &= \left(\frac{d\rho}{dt} \cdot \frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + \frac{d^2\rho}{dt^2}\vec{u}_\rho \right) + \left(\rho\vec{u}_\varphi \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \rho \frac{d\vec{u}_\varphi}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\rho}{dt}\vec{u}_\varphi \frac{d\varphi}{dt} \right) \\ &= \frac{d\rho}{dt}\vec{u}_\varphi \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d^2\rho}{dt^2}\vec{u}_\rho + \rho\vec{u}_\varphi \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \rho \left(-\vec{u}_\rho \cdot \frac{d\varphi}{dt} \right) \cdot \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\rho}{dt}\vec{u}_\varphi \frac{d\varphi}{dt} \\ &= \frac{d\rho}{dt}\vec{u}_\varphi \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d^2\rho}{dt^2}\vec{u}_\rho + \rho\vec{u}_\varphi \frac{d^2\varphi}{dt^2} - \rho\vec{u}_\rho \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \frac{d\rho}{dt}\vec{u}_\varphi \frac{d\varphi}{dt} \\ &= \frac{d^2\rho}{dt^2}\vec{u}_\rho - \rho\vec{u}_\rho \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \rho\vec{u}_\varphi \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2 \cdot \frac{d\rho}{dt}\vec{u}_\varphi \frac{d\varphi}{dt} \end{aligned}$$

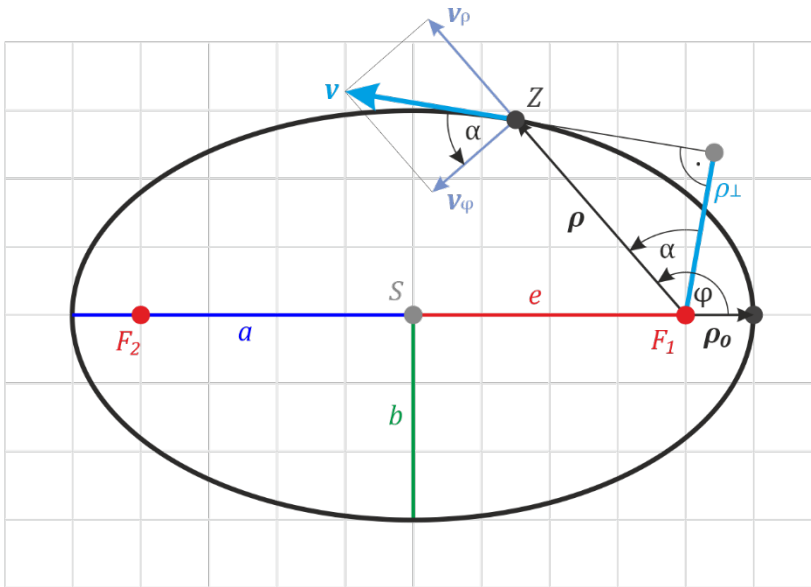
Upravíme do konečné podoby a dostáváme výraz pro vektor okamžitého zrychlení $\vec{a}_v$:

$$\vec{a}_v = \left[\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] \vec{u}_\rho + \left(\rho \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2 \frac{d\rho}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \right) \vec{u}_\varphi$$

10

kde $\rho(d\varphi/dt)^2$ je *dostředivé zrychlení*, $\rho(d^2\varphi/dt^2)$ je *Eulerovo zrychlení*, $2(d\rho/dt) \cdot (d\varphi/dt)$ je *Coriolisovo zrychlení*.

2.6 Moment hybnosti v polárním systému souřadnic



Definice

Moment hybnosti $\vec{H}$ tělesa je vektor, který definujeme vztahem:

$$\vec{H} = m \cdot (\vec{v} \times \vec{\rho})$$

Měrný moment hybnosti $\vec{h}$ definujeme jako moment hybnosti $\vec{H}$ na jednotku hmotnosti:

$$\vec{h} = \frac{\vec{H}}{m} = \frac{m \cdot (\vec{v} \times \vec{\rho})}{m} = \vec{v} \times \vec{\rho}$$

Věta

Velikost momentu hybnosti H je s pohybem tělesa konstantní, a proto platí:

$$H = |\vec{H}| = |m \cdot (\vec{v} \times \vec{\rho})| = m \cdot |\vec{v} \times \vec{\rho}| = m \cdot v\rho \cos \alpha = m \cdot v\rho_{\perp}$$

Velikost měrného momentu hybnosti h je s pohybem tělesa konstantní, a proto platí:

$$h = |\vec{h}| = |\vec{v} \times \vec{\rho}| = v\rho \cos \alpha = v\rho_{\perp} \quad 11$$

Výraz (11) vyjádříme v polárních souřadnicích s využitím rovnice (9) a dostaneme rovnici momentu hybnosti:

$$h = v\rho \cos \alpha = \frac{v_{\varphi}}{\cos \alpha} \cdot \rho \cos \alpha = \rho v_{\varphi} = \rho \cdot \rho \frac{d\varphi}{dt} = \rho^2 \frac{d\varphi}{dt} = \rho^2 \omega = \rho^2 \frac{2\pi}{T}$$

$$h = \rho^2 \omega = \rho^2 \frac{2\pi}{T} \quad 12$$

Důkaz

Pohyb tělesa v gravitačním poli s polohovým vektorem $\vec{\rho}$ způsobí, že za čas dt dojde ke změně polohového vektoru o vzdálenost $\vec{\rho} + d\vec{s}$, kde $d\vec{s}$ je elementární přírůstek ve směru pohybu tělesa. Elementární plocha $d\vec{P}$ opsaná tímto průvodičem vychází z obsahu trojúhelníku:

$$d\vec{P} = \frac{1}{2}(\vec{\rho} \times d\vec{s})$$

Plošná rychlost je pak:

$$\vec{w} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{2}(\vec{\rho} \times d\vec{s})\right)}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(\vec{\rho} \times d\vec{s})}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \left(\vec{\rho} \times \frac{d\vec{s}}{dt}\right) = \frac{1}{2} \cdot (\vec{\rho} \times \vec{v})$$

Druhý Keplerův zákon říká, že *plošná rychlost* je konstantní ($\vec{w} = \text{konst.}$). Pro hybnost tělesa lze psát:

$$\vec{H} = m \cdot (\vec{\rho} \times \vec{v}) = 2m\vec{w}$$

Vidíme, že je-li konstantní *plošná rychlost* $\vec{w}$, je také konstantní moment hybnosti $\vec{H}$ a také měrný moment hybnosti $\vec{h}$. Ověřme tedy konstantní *plošnou rychlost* $\vec{w}$ pomocí *plošného zrychlení* $\vec{q}$, což je derivace *plošné rychlosti* podle času:

$$\begin{aligned} \vec{q} = \frac{d\vec{w}}{dt} &= \frac{d\left(\frac{1}{2} \cdot (\vec{\rho} \times \vec{v})\right)}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d(\vec{\rho} \times \vec{v})}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(\vec{\rho} \times d\vec{v}) + (d\vec{\rho} \times \vec{v})}{dt} + \frac{1}{2} \cdot \left(\vec{\rho} \times \frac{d\vec{v}}{dt}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d\vec{\rho}}{dt} \times \vec{v}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\vec{\rho} \times \frac{d\vec{v}}{dt}\right) = \frac{1}{2} \cdot (\vec{\rho} \times \vec{a}) \end{aligned}$$

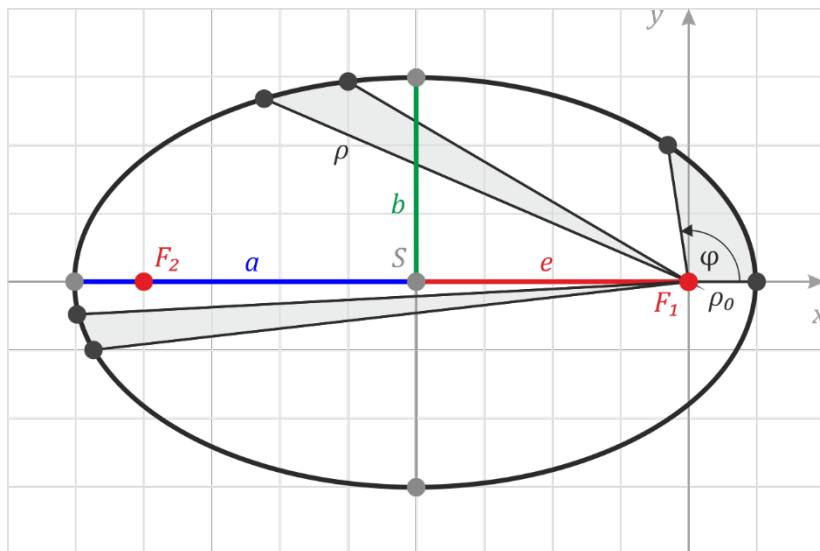
Při pohybu těles kolem hmotného centra je *plošná rychlost* konstantní, to znamená, že *plošné zrychlení* musí být nulové:

$$\vec{\rho} \times \vec{a} = 0$$

Jak víme, vektorový součin dvou vektorů je nulový, pokud je nulový alespoň jeden z vektorů, nebo oba leží v jedné přímce. V našem případě ani $\vec{\rho}$, ani $\vec{a}$ nejsou nulové, protože pohyb probíhá v určité vzdálenosti od centra a při křivočarém pohybu se vyskytuje vždy nějaké zrychlení. Znamená to tedy, že vektor zrychlení $\vec{a}$ by měl ležet na společné přímce s průvodičem $\vec{\rho}$. Jak víme, vektor zrychlení $\vec{a}$ směřuje vždy do centra silového působení, z čehož plyne, že *plošná rychlost* je konstantní.

Q. E. D.

2.7 Druhý Keplerův zákon



Věta

Obsahy ploch opsaných průvodičem planety v libovolném místě trajektorie za stejný čas jsou stejně velké. Jinými slovy to znamená, že *plošná rychlost* je konstantní.

Důkaz

Vyjdeme z Newtonova gravitačního zákona (2) a Druhého Newtonova zákona (4):

$$\begin{aligned} -G \cdot \frac{m \cdot M}{|\vec{\rho}|^2} \cdot \frac{\vec{\rho}}{|\vec{\rho}|} &= m \cdot \vec{a}_g = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \frac{d^2\vec{\rho}}{dt^2} = \vec{F} \\ -\frac{G \cdot M}{|\vec{\rho}|^2} \cdot \frac{\vec{\rho}}{|\vec{\rho}|} &= -\frac{G \cdot M}{|\vec{\rho}|^2} \cdot \vec{u}_\rho = \vec{a}_g = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{\rho}}{dt^2} \end{aligned}$$

Po vydělení hmotou m jsme dostali vektor gravitačního zrychlení $\vec{a}_g$, který směřuje vždy do těžiště centrálního tělesa. Vidíme, že se dá vyjádřit jako skalární násobek vektoru $\vec{\rho}$. Proto jejich vektorový součin je roven nule:

$$\vec{\rho} \times \vec{a}_g = \vec{\rho} \times \frac{d^2\vec{\rho}}{dt^2} = 0$$

Výraz $\vec{\rho} \times \vec{a}_g$ lze také získat derivací výrazu $\vec{\rho} \times d\vec{\rho}/dt$:

$$\frac{d}{dt} \left(\vec{\rho} \times \frac{d\vec{\rho}}{dt} \right) = \vec{\rho} \times \frac{d^2\vec{\rho}}{dt^2} + \frac{d\vec{\rho}}{dt} \times \frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{\rho} \times \frac{d^2\vec{\rho}}{dt^2} = \vec{\rho} \times \vec{a}_g$$

Z posledních dvou výrazu plyne:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\vec{\rho} \times \frac{d\vec{\rho}}{dt} \right) &= \vec{\rho} \times \frac{d^2\vec{\rho}}{dt^2} = \vec{\rho} \times \vec{a}_g = 0 \\ \int \frac{d}{dt} \left(\vec{\rho} \times \frac{d\vec{\rho}}{dt} \right) dt &= \vec{\rho} \times \frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{\rho} \times \vec{v} = \vec{h} \end{aligned}$$

$$\vec{h} = \vec{\rho} \times \vec{v}$$

13

Z výsledku je zřejmé, že vektory $\vec{\rho}$ a $\vec{v}$ leží v rovině kolmé k fixnímu vektoru měrného momentu hybnosti $\vec{h}$, takže tato rovina prochází těžištěm centrálního tělesa. Již jsme odvodili, že pro okamžitou rychlost platí výraz (9):

$$\vec{v} = \frac{d\rho}{dt} \vec{u}_\rho + \rho \frac{d\varphi}{dt} \vec{u}_\varphi$$

Dosadíme jej do vztahu (13) a upravíme:

$$\begin{aligned} \vec{h} &= \vec{\rho} \times \vec{v} = \vec{\rho} \times \left(\frac{d\rho}{dt} \vec{u}_\rho + \rho \frac{d\varphi}{dt} \vec{u}_\varphi \right) = \rho \vec{u}_\rho \times \left(\frac{d\rho}{dt} \vec{u}_\rho + \rho \frac{d\varphi}{dt} \vec{u}_\varphi \right) = \rho \frac{d\rho}{dt} (\vec{u}_\rho \times \vec{u}_\rho) + \rho^2 \frac{d\varphi}{dt} (\vec{u}_\rho \times \vec{u}_\varphi) \\ &= \rho^2 \frac{d\varphi}{dt} (\vec{u}_\rho \times \vec{u}_\varphi) = \rho^2 \frac{d\varphi}{dt} \vec{u}_k \end{aligned}$$

Kde $\vec{u}_k = \vec{u}_\rho \times \vec{u}_\varphi$. Definujme počáteční podmínky:

$$t = 0; \varphi = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho = \rho_0 = \rho_{\min} \Rightarrow \frac{d\rho}{dt} = 0 \\ v = v_0 = |\vec{v}| = \left| \frac{d\rho}{dt} \vec{u}_\rho + \rho \frac{d\varphi}{dt} \vec{u}_\varphi \right| \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$v = v_0 = |\vec{v}|_{t=0} = \left| \rho \frac{d\varphi}{dt} \vec{u}_\varphi \right| = \left(\left| \rho \frac{d\varphi}{dt} \right| \cdot |\vec{u}_\varphi| \right) = \left(\left| \rho \frac{d\varphi}{dt} \right| \cdot 1 \right) = \left| \rho \frac{d\varphi}{dt} \right| = \rho \omega = \rho \frac{2\pi}{T}$$

kde $d\varphi/dt = \omega = 2\pi/T$ je úhlová rychlost průvodiče ρ . Nyní již můžeme pokračovat v předchozí úpravě:

$$\vec{h} = \vec{\rho} \times \vec{v} = \rho^2 \frac{d\varphi}{dt} \vec{u}_k = \left(\rho^2 \frac{d\varphi}{dt} \right)_{t=0; \varphi=0} \cdot \vec{u}_k = (\rho^2 \omega)_{t=0; \varphi=0} \cdot \vec{u}_k = \rho_0 v_0 \cdot \vec{u}_k$$

$$\rho^2 \frac{d\varphi}{dt} = \rho^2 \omega = \rho^2 \frac{2\pi}{T} = \rho_0 v_0 = h \quad 14$$

K určení obsahu plochy opsané průvodičem planety využijeme plošný diferenciál v polárním systému souřadnic, který vychází z geometrického obsahu trojúhelníku:

$$dP = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \rho \cdot d\varphi = \frac{1}{2} \rho^2 d\varphi$$

Velikost plochy opsané průvodičem za jednotku času určíme derivací podle času:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \rho^2 d\varphi \right) = \frac{1}{2} \rho^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} \rho^2 \omega = \frac{1}{2} \rho^2 \frac{2\pi}{T} = \frac{1}{2} \rho_0 v_0 = \frac{1}{2} h$$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{2} \rho_0 v_0 = \frac{1}{2} h \quad 15$$

Z výrazu (15) a ze skutečnosti, že měrný moment hybnosti h je konstantní plyne, že plošná rychlost dP/dt je konstantní.

Q. E. D.

2.8 Třetí Keplerův zákon

Věta

Poměr druhých mocnin oběžných dob dvou planet se rovná poměru třetích mocnin velikosti *hlavních poloos* jejich trajektorií:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \quad 16$$

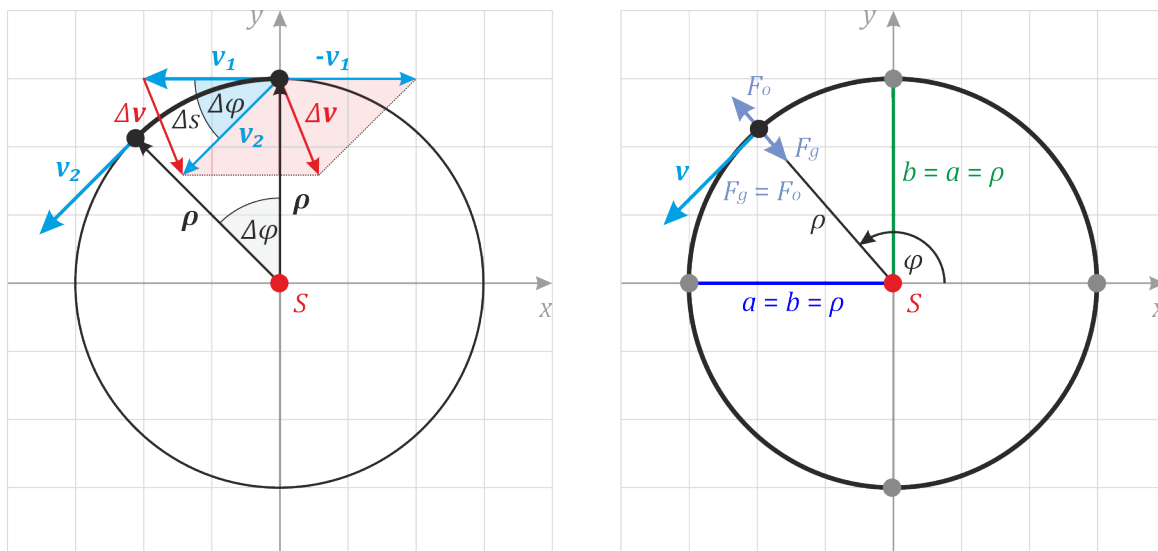
nebo také poměr druhé mocniny periody T oběhu planety kolem centrálního tělesa a třetí mocniny délky *hlavní poloosy* a je konstantní:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \quad 17$$

kde T, T_1, T_2 jsou oběžné doby, a, a_1, a_2 jsou *hlavní poloosy* trajektorií, G je gravitační konstanta a M hmotnost centrálního tělesa.

Důkaz

2.8.1 Kruhová trajektorie



Nejprve si odvodíme vztah pro dostředivé zrychlení a_d . Jak víme, zrychlení je obecně definováno jako změna vektoru rychlosti (velikosti nebo směru) v čase:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

U rovnoměrného pohybu po kružnici se nemění velikost obvodové rychlosti, ale směr. Z obrázku je patrné, že platí:

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t}$$

Dále platí:

$$\frac{|d\vec{v}|}{ds} = \frac{|\vec{v}_1|}{|\vec{\rho}|} = \frac{|\vec{v}_2|}{|\vec{\rho}|} = \frac{|\vec{v}|}{|\vec{\rho}|} \Rightarrow |d\vec{v}| = ds \cdot \frac{|\vec{v}|}{|\vec{\rho}|}$$

Pro velikost dostředivého zrychlení a_d můžeme psát:

$$a_d = |\vec{a}| = \frac{|d\vec{v}|}{dt} = \frac{ds \cdot \frac{|\vec{v}|}{|\vec{\rho}|}}{dt} = v \cdot \frac{v}{\rho} = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(\omega\rho)^2}{\rho} = \omega^2\rho = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \rho$$

Dostředivé zrychlení vyjadřuje změnu směru obvodové rychlosti a směřuje do středu.

Teoreticky předpokládáme, že planeta obíhá kolem centrálního tělesa po kruhové dráze, to znamená, že obě poloosy elipsy jsou rovny poloměru $a = b = \rho$. Vyjádříme si gravitační sílu F_g z Newtonova gravitačního zákona (1) a odstředivou sílu F_o , které mají stejnou velikost, jsou ale opačně orientované (vytváří rovnováhu):

$$F_g = G \cdot \frac{m \cdot M}{\rho^2} \quad ; \quad F_o = m \cdot a_g = m \cdot \omega^2\rho = m \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \rho$$

$$F_g = F_o$$

$$G \cdot \frac{m \cdot M}{\rho^2} = m \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \rho = \frac{m \cdot 4\pi^2 \rho}{T^2}$$

$$\frac{GM}{\rho^2} = \frac{4\pi^2 \rho}{T^2}$$

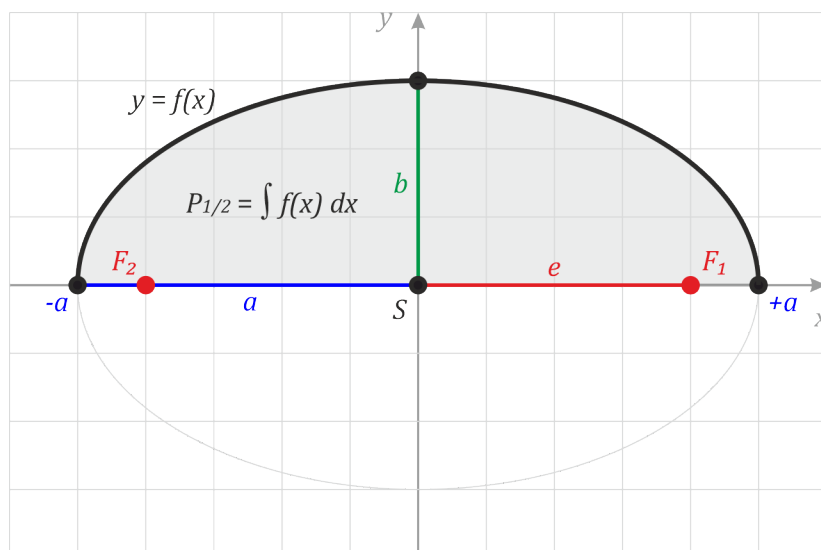
$$\frac{T^2}{\rho^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

Takže vidíme, že poměr druhé mocniny periody T oběhu planety kolem centrálního tělesa a třetí mocniny délky *hlavní poloosy* a je konstantní. Pokud výraz aplikujeme na dvě tělesa, dostáváme:

$$\frac{T_1^2}{\rho_1^3} = \frac{T_2^2}{\rho_2^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \Rightarrow \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{\rho_1^3}{\rho_2^3}$$

Takže poměr druhých mocnin oběžných dob dvou planet se rovná poměru třetích mocnin velikosti *hlavních poloos* jejich trajektorií.

2.8.2 Eliptická trajektorie



Důkaz provedeme za pomoci dvou různých vyjádření plochy elipsy. Nejprve vyjádříme plochu pomocí integrování v kartézské soustavě souřadnic:

Lemma 1

Nechť má elipsa *hlavní poloosu* délky a a *vedlejší poloosu* délky b , pak její obsah vypočítáme podle vztahu:

$$P = \pi ab \quad 18$$

Důkaz 1

Vyjdeme ze středové rovnice elipsy (7) v počátku souřadnicového systému s hlavní osou rovnoběžnou s osou x :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad 19$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$a^2y^2 = a^2b^2 - b^2x^2$$

$$y^2 = \frac{a^2b^2 - b^2x^2}{a^2}$$

$$y^2 = \frac{b^2(a^2 - x^2)}{a^2}$$

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

Provedeme integraci dané funkce $y = f(x)$ na intervalu $\langle -a; a \rangle$

$$\begin{aligned} P_{\frac{1}{2}} &= \int_{-a}^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{b}{a} \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{b}{a} \left[\frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} \right]_{-a}^a \\ &= \frac{b}{a} \left(\frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{a}{a} - \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{-a}{a} \right) = \frac{b}{a} \left(\frac{a^2}{2} \frac{\pi}{2} + \frac{a^2}{2} \frac{\pi}{2} \right) = \frac{b}{a} \left(\frac{a^2}{2} \pi \right) = \frac{\pi ab}{2} \end{aligned}$$

Celková plocha elipsy bude dvojnásobkem integrálu dané funkce:

$$P = 2 \cdot P_{1/2} = 2 \cdot \frac{\pi ab}{2} = \pi ab$$

Q. E. D.

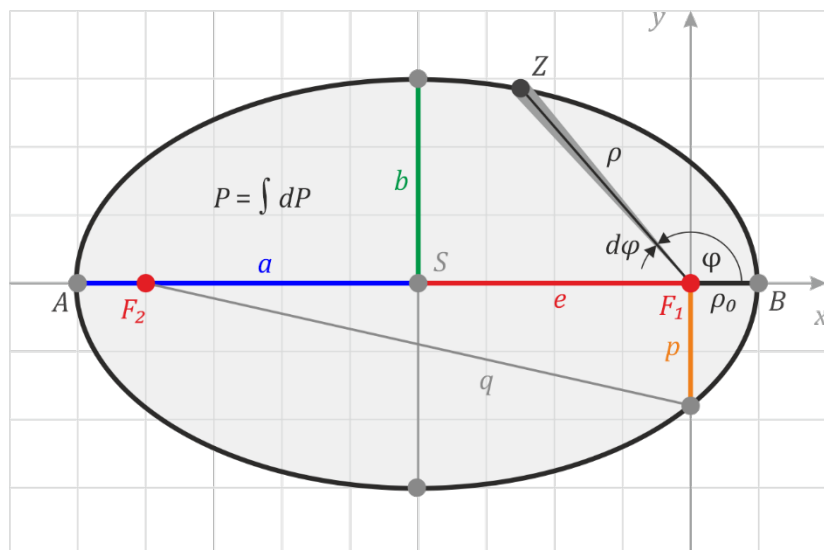
Dále uvažujme eliptickou trajektorii v polárních souřadnicích, kde vyjdeme z výrazu (15), který říká, že obsahy ploch opsaných průvodičem planety v libovolném místě za stejný čas jsou stejně velké, to znamená, že plošná rychlost je konstantní:

Lemma 2

Nechť je dána elipsa definovaná v polárních souřadnicích, ρ její průvodič, φ úhel průvodiče s osou x a v rychlost koncového bodu průvodiče (planety) opisující tuto elipsu. Pak její plochu (obsah) P vypočítáme podle vztahu:

$$P = \frac{1}{2} T \rho_0 v_0 \quad 20$$

kde v_0 je počáteční rychlost planety při počáteční vzdálenost ρ_0 od centrálního tělesa a T perioda oběhu.



Důkaz 2

Již jsme ukázali, že platí (15):

$$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{2} \rho_0 v_0 \Rightarrow dP = \frac{1}{2} \rho_0 v_0 dt$$

Celou plochu elipsy určíme integrací:

$$P = \int_0^T dP = \int_0^T \frac{1}{2} \rho_0 v_0 dt = \frac{1}{2} T \rho_0 v_0$$

Q. E. D.

Dále položíme rovnítko mezi oběma výrazy pro plochu P a vyjádříme periodu T :

$$P = \pi ab = \frac{1}{2} T \rho_0 v_0 \Rightarrow T = \frac{2\pi ab}{\rho_0 v_0}$$

$$T = \frac{2\pi ab}{\rho_0 v_0}$$

21

Víme, že numerická excentricita elipsy ε , což je míra zploštění elipsy oproti kružnici, je definovaná vztahem:

$$\varepsilon = \frac{e}{a} ; \quad e \in \langle 0; a \rangle \Rightarrow \varepsilon \in \langle 0; 1 \rangle$$

kde e je lineární excentricita elipsy dána vztahem:

$$e = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Dosadíme a upravíme:

$$\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

$$\varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

$$a^2 \varepsilon^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - a^2 \varepsilon^2 = a^2(1 - \varepsilon^2)$$

$$b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2}$$

Tento výraz dosadíme do rovnice (21) pro periodu T :

$$T = \frac{2\pi ab}{\rho_0 v_0} = \frac{2\pi a^2}{\rho_0 v_0} \cdot \sqrt{1 - \varepsilon^2} = \frac{2\pi a^2}{h} \cdot \sqrt{1 - \varepsilon^2} \quad 22$$

Nyní trochu odbočíme a z rovnice elipsy v polárních souřadnicích (8)

$$\rho = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{1 + \varepsilon \cos \varphi}{p} \quad 23$$

zjistíme maximální délku průvodiče ρ_π , která nastane právě při úhlu $\varphi = \pi$. Nejprve si vyjádříme parametr elipsy p při ρ_0 :

$$\rho_0 = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi_0} \Rightarrow p = \rho_0 \cdot (1 + \varepsilon \cos 0) = \rho_0 \cdot (1 + \varepsilon) \quad 24$$

Dosadíme do rovnice (23) a vyjádříme ρ_π :

$$\rho_\pi = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi_\pi} = \frac{\rho_0 \cdot (1 + \varepsilon)}{1 + \varepsilon \cos \pi} = \rho_0 \cdot \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}$$

Dále víme, že pro elipsu platí tato rovnost:

$$\rho_0 + \rho_\pi = 2a$$

Dosadíme maximální délku průvodiče:

$$\rho_0 + \rho_0 \cdot \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} = \rho_0 \left(1 + \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \right) = \rho_0 \cdot \frac{1 - \varepsilon + 1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} = \frac{2\rho_0}{1 - \varepsilon} = 2a$$

$$\rho_0 = a(1 - \varepsilon)$$

$$\varepsilon = 1 - \frac{\rho_0}{a} \quad 25$$

Již jsme odvodili, že pro vektor zrychlení $\vec{a}_v$ platí (10):

$$\vec{a}_v = \left[\frac{d^2 \rho}{dt^2} - \rho \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] \vec{u}_\rho + \left(\rho \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2 \cdot \frac{d\rho}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \right) \vec{u}_\varphi = \vec{a}_g + \vec{a}_\varphi$$

Z Newtonova gravitačního zákona (2) a zákona síly (4) plyne:

$$\vec{a}_g = -\frac{G \cdot M}{|\vec{\rho}|^2} \cdot \vec{u}_\rho$$

Z obou posledních výrazů dostaneme:

$$a_g = \frac{d^2 \rho}{dt^2} - \rho \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = -\frac{G \cdot M}{|\vec{\rho}|^2} \Rightarrow \frac{d^2 \rho}{dt^2} = \rho \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - \frac{G \cdot M}{\rho^2} \quad 26$$

$$a_\varphi = \rho \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2 \cdot \frac{d\rho}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = 0 \quad 27$$

Dále jsme odvodili, že platí (14):

$$\rho^2 \frac{d\varphi}{dt} = \rho^2 \omega = \rho^2 \frac{2\pi}{T} = \rho_0 v_0 = h \Rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\rho_0 v_0}{\rho^2} = \frac{h}{\rho^2}$$

Dosadíme do (26) a dostáváme:

$$\frac{d^2 \rho}{dt^2} = \rho \cdot \left(\frac{\rho_0 v_0}{\rho^2} \right)^2 - \frac{G \cdot M}{\rho^2} = \frac{\rho_0^2 v_0^2}{\rho^3} - \frac{G \cdot M}{\rho^2} \quad 28$$

Nebo použijeme radiální rychlost v_ρ jako substituci, abychom z diferenciální rovnice druhého řádu dostali diferenciální rovnici prvního řádu:

$$v_\rho = \frac{d\rho}{dt}$$

$$\frac{d^2 \rho}{dt^2} = \frac{dv_\rho}{dt} = \frac{dv_\rho}{d\rho} \cdot \frac{d\rho}{dt} = v_\rho \frac{dv_\rho}{d\rho} = \frac{\rho_0^2 v_0^2}{\rho^3} - \frac{G \cdot M}{\rho^2} \quad 29$$

Rovnici vynásobíme dvěma:

$$2 \cdot v_\rho \frac{dv_\rho}{d\rho} = 2 \cdot \frac{\rho_0^2 v_0^2}{\rho^3} - 2 \cdot \frac{G \cdot M}{\rho^2}$$

Integrováním přes ρ dostáváme:

$$\int 2v_\rho \frac{dv_\rho}{d\rho} d\rho = \int \left(2 \cdot \frac{\rho_0^2 v_0^2}{\rho^3} - 2 \cdot \frac{G \cdot M}{\rho^2} \right) d\rho$$

$$\int 2v_\rho \frac{dv_\rho}{d\rho} d\rho = \int 2 \cdot \frac{\rho_0^2 v_0^2}{\rho^3} d\rho - \int 2 \cdot \frac{G \cdot M}{\rho^2} d\rho$$

$$\int 2v_\rho dv_\rho = 2\rho_0^2 v_0^2 \int \frac{1}{\rho^3} d\rho - 2GM \int \frac{1}{\rho^2} d\rho$$

$$v_\rho^2 = 2\rho_0^2 v_0^2 \left(-\frac{1}{2\rho^2} \right) - 2GM \left(-\frac{1}{\rho} \right) + C_1$$

$$v_\rho^2 = -\frac{\rho_0^2 v_0^2}{\rho^2} + \frac{2GM}{\rho} + C_1 \quad 30$$

Konstantu C_1 zjistíme dosazením počátečních podmínek:

$$t = 0 \quad , \quad \varphi = 0 \quad , \quad \rho = \rho_0 \quad , \quad v = v_\varphi = v_0 \quad , \quad a = a_\varphi = 0 \quad , \quad \frac{d\rho}{dt} = v_\rho = 0$$

$$0 = -\frac{\rho_0^2 v_0^2}{\rho_0^2} + \frac{2GM}{\rho_0} + C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{\rho_0^2 v_0^2}{\rho_0^2} - \frac{2GM}{\rho_0} = v_0^2 - \frac{2GM}{\rho_0}$$

Výsledek dosadíme zpět do rovnice (30), upravíme a dostáváme diferenciální rovnici prvního řádu:

$$v_\rho^2 = -\frac{\rho_0^2 v_0^2}{\rho^2} + \frac{2GM}{\rho} + v_0^2 - \frac{2GM}{\rho_0}$$

$$\left(\frac{d\rho}{dt} \right)^2 = v_0^2 \left(1 - \frac{\rho_0^2}{\rho^2} \right) + 2GM \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right) \quad 31$$

Výraz (14) umocníme na druhou:

$$\rho^4 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \rho_0^2 v_0^2$$

Výraz (31) pak vydělíme touto rovnicí a upravíme:

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{d\rho}{dt} \right)^2}{\rho^4 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2} &= \frac{v_0^2 \left(1 - \frac{\rho_0^2}{\rho^2} \right) + 2GM \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right)}{\rho_0^2 v_0^2} \\ \frac{1}{\rho^4} \left(\frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2 &= \frac{v_0^2 \left(1 - \frac{\rho_0^2}{\rho^2} \right)}{\rho_0^2 v_0^2} + \frac{2GM \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right)}{\rho_0^2 v_0^2} \\ \frac{1}{\rho^4} \left(\frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2 &= \frac{1}{\rho_0^2} \left(1 - \frac{\rho_0^2}{\rho^2} \right) + \frac{2GM}{\rho_0^2 v_0^2} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right) \end{aligned}$$

Provedeme substituci a dosadíme:

$$s_1 = \frac{GM}{\rho_0^2 v_0^2}$$

$$\frac{1}{\rho^4} \left(\frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2 = \frac{1}{\rho_0^2} \left(1 - \frac{\rho_0^2}{\rho^2} \right) + 2s_1 \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right) \quad 32$$

Zavedeme další substituci, derivujeme a umocníme:

$$\begin{aligned} s_2 = \frac{1}{\rho} &\Rightarrow \frac{ds_2}{d\varphi} = -\frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{d\varphi} \Rightarrow \left(\frac{ds_2}{d\varphi} \right)^2 = \frac{1}{\rho^4} \left(\frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2 \\ s_{2_0} &= \frac{1}{\rho_0} \end{aligned}$$

Dosadíme do rovnice (32) a upravíme:

$$\begin{aligned} \left(\frac{ds_2}{d\varphi} \right)^2 &= s_{2_0}^2 \left(1 - \frac{s_2^2}{s_{2_0}^2} \right) + 2s_1(s_2 - s_{2_0}) = s_{2_0}^2 - s_2^2 + 2s_1s_2 - 2s_1s_{2_0} - s_1^2 + s_1^2 \\ &= (s_{2_0} - s_1)^2 - (s_2 - s_1)^2 \\ \frac{ds_2}{d\varphi} &= \pm \sqrt{(s_{2_0} - s_1)^2 - (s_2 - s_1)^2} \end{aligned}$$

Znaménko před odmocninou určíme z této úvahy:

$$\left. \begin{aligned} \text{Úhel } \varphi \text{ s časem roste} &\Rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\rho_0 v_0}{\rho^2} > 0 \\ \text{Pro } t = 0 &\Rightarrow \rho = \rho_0 = \rho_{\min} \Rightarrow \frac{d\rho}{dt} \geq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left(\frac{\frac{d\rho}{dt}}{\frac{d\varphi}{dt}} = \frac{d\rho}{d\varphi} \right) \geq 0 \Rightarrow \left(\frac{ds_2}{d\varphi} = -\frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{d\varphi} \right) \leq 0$$

Z toho plyne, že před odmocninou musí být záporné znaménko:

$$\frac{ds_2}{d\varphi} = -\sqrt{(s_{2_0} - s_1)^2 - (s_2 - s_1)^2} \quad 33$$

Rovnici (33) dále upravíme:

$$\begin{aligned} \frac{-1}{\sqrt{(s_{2_0} - s_1)^2 - (s_2 - s_1)^2}} \cdot \frac{ds_2}{d\varphi} &= 1 \\ \int \frac{-1}{\sqrt{(s_{2_0} - s_1)^2 - (s_2 - s_1)^2}} \cdot \frac{ds_2}{d\varphi} \cdot d\varphi &= \int 1 \cdot d\varphi \\ \int -\frac{1}{\sqrt{(s_{2_0} - s_1)^2 - (s_2 - s_1)^2}} \cdot ds_2 &= \varphi + C_2 \end{aligned}$$

$$\cos^{-1}\left(\frac{s_2 - s_1}{s_{2_0} - s_1}\right) = \varphi + C_2 \quad 34$$

Opět za pomoci počátečních podmínek určíme konstantu C_2 :

$$\begin{aligned} t = 0 \quad , \quad \varphi = 0 \quad , \quad \rho = \rho_0 &\Rightarrow s_2 = s_{2_0} \\ \cos^{-1}\left(\frac{s_{2_0} - s_1}{s_{2_0} - s_1}\right) &= 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = \cos^{-1}(1) = 0 \end{aligned}$$

Dosadíme do (34), vyjádříme inverzní rovnici a po úpravě a dostáváme:

$$\cos^{-1}\left(\frac{s_2 - s_1}{s_{2_0} - s_1}\right) = \varphi \Rightarrow \cos \varphi = \frac{s_2 - s_1}{s_{2_0} - s_1}$$

$$s_2 = s_1 + (s_{2_0} - s_1) \cos \varphi \quad 35$$

Nyní určíme numerickou excentricitu ε elipsy za pomoci rovnice pro elipsu v polárních souřadnicích (23), do které dosadíme výraz (24) pro parametr p a po úpravě tak dostali požadovaný tvar rovnice (35):

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi} = \frac{\rho_0(1 + \varepsilon)}{1 + \varepsilon \cos \varphi} = \frac{\rho_0(1 + \varepsilon)}{1 + (\varepsilon + 1 - 1) \cos \varphi} = \frac{1}{\frac{1}{\rho_0(1 + \varepsilon)} + \left[\frac{\varepsilon + 1}{\rho_0(1 + \varepsilon)} - \frac{1}{\rho_0(1 + \varepsilon)}\right] \cos \varphi} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\rho_0(1 + \varepsilon)} + \left[s_{2_0} - \frac{1}{\rho_0(1 + \varepsilon)}\right] \cos \varphi} \\ s_2 = \frac{1}{\rho} &= \frac{1}{\rho_0(1 + \varepsilon)} + \left[s_{2_0} - \frac{1}{\rho_0(1 + \varepsilon)}\right] \cos \varphi \quad 36 \end{aligned}$$

Porovnáním výrazů (35) a (36) dostáváme:

$$s_1 = \frac{1}{\rho_0(1 + \varepsilon)} = \frac{GM}{\rho_0^2 v_0^2} \Rightarrow \varepsilon = \frac{\rho_0 v_0^2}{GM} - 1 \quad 37$$

Dostáváme se do finále důkazu. Výraz (25) pro ε porovnáme s výrazem (37) a vyjádříme ρ_0 :

$$\varepsilon = 1 - \frac{\rho_0}{a} = \frac{\rho_0 v_0^2}{GM} - 1$$

$$\frac{\rho_0}{a} + \frac{\rho_0 v_0^2}{GM} = 2$$

$$\rho_0 \left(\frac{1}{a} + \frac{v_0^2}{GM} \right) = 2$$

$$\rho_0 \frac{GM + av_0^2}{aGM} = 2$$

$$\rho_0 = \frac{2aGM}{GM + av_0^2}$$

38

Nyní použijeme výraz (22) pro periodu T , do kterého dosadíme výraz (38):

$$T = \frac{2\pi a^2}{\rho_0 v_0} \cdot \sqrt{1 - \varepsilon^2}$$

$$\begin{aligned} T^2 &= \left(\frac{2\pi a^2}{\rho_0 v_0} \right)^2 \cdot (1 - \varepsilon^2) = \frac{4\pi^2 a^4}{\left(\frac{2aGM}{GM + av_0^2} \right)^2 v_0^2} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{\rho_0}{a} \right)^2 \right] \\ &= \frac{4\pi^2 a^4}{4a^2 v_0^2 G^2 M^2} \cdot \left[1 - \frac{(a - \rho_0)^2}{a^2} \right] = \frac{\pi^2 a^2}{v_0^2 G^2 M^2} \cdot \frac{a^2 - (a - \rho_0)^2}{a^2} \\ &= \frac{\pi^2 a^2 (GM + av_0^2)^2}{v_0^2 G^2 M^2} \cdot \frac{a^2 - a^2 + 2a\rho_0 - \rho_0^2}{a^2} = \frac{\pi^2 a^2 (GM + av_0^2)^2}{v_0^2 G^2 M^2} \cdot \frac{2a\rho_0 - \rho_0^2}{a^2} \\ &= \frac{\pi^2 a^2 (GM + av_0^2)^2}{v_0^2 G^2 M^2} \cdot \frac{2a \frac{2aGM}{GM + av_0^2} - \left(\frac{2aGM}{GM + av_0^2} \right)^2}{a^2} \\ &= \frac{\pi^2 a^2 (GM + av_0^2)^2}{v_0^2 G^2 M^2} \cdot \frac{\frac{4a^2 GM}{GM + av_0^2} - \frac{4a^2 G^2 M^2}{(GM + av_0^2)^2}}{a^2} \\ &= \frac{\pi^2 a^2 (GM + av_0^2)^2}{v_0^2 G^2 M^2} \cdot \frac{4GM(GM + av_0^2) - 4G^2 M^2}{(GM + av_0^2)^2} \\ &= \frac{\pi^2 a^2}{v_0^2 G^2 M^2} \cdot [4GM(GM + av_0^2) - 4G^2 M^2] = \frac{\pi^2 a^2}{v_0^2 G^2 M^2} \cdot [4G^2 M^2 + 4GMav_0^2 - 4G^2 M^2] \\ &= \frac{\pi^2 a^2}{v_0^2 G^2 M^2} \cdot 4GMav_0^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM} \end{aligned}$$

Dokázali jsme tedy, že platí:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM} \Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \Rightarrow GM = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$$

Poměr druhé mocniny periody oběžné doby ku třetí mocnině velikosti *hlavní poloosy* eliptické trajektorie je konstantní. Opět pokud výraz aplikujeme na dvě tělesa, pak dostáváme:

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \Rightarrow \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

Takže poměr druhých mocnin oběžných dob dvou planet se rovná poměru třetích mocnin velikosti *hlavních poloos* jejich trajektorií.

Q. E. D.